Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 10 класс

Вариант 1.

1. На стене висят двое одинаковых часов, длина минутных стрелок которых равна $\sqrt{2}$, а центры крепления их минутных стрелок удалены друг от друга на расстояние $\mathrm{d} = 5$. Известно, что одни часы отстают на 15 мин, а другие идут точно. Найти наибольшее и наименьшее расстояние между концами минутных стрелок, наблюдаемое в течение одного часа.

2. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx^2 + c$ имеет три корня, равные попарным суммам корней многочлена $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. Найти a, b, c.

3. На бильярдном столе из одинаковых 153 шаров выложен правильный треугольник. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен в треугольник и любая пара соседних шаров в треугольнике касаются друг друга. Сколько шаров составляют сторону треугольника?

4. Четыре числа (x, y, z, t) удовлетворяют трем условиям:

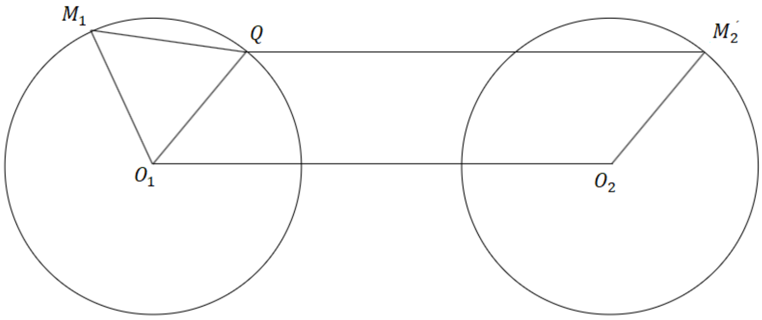
$$x^2 + y^2 = 1,\ z^2 + t^2 = 4,\ xz + yt = -2.$$

Найти t, если известно, что $y + z$ принимает наибольшее возможное значение.

5. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с прямым углом при вершине A описана около окружности. Ее диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника ABM, если длина стороны AB равна 2.

Ответы и решения

Задача 1. Обозначим символом $R = \sqrt{2}$ длину минутных стрелок, символом $d = 5$ – расстояние между центрами крепления стрелок. Заметим, что выполняется неравенство $\sqrt{2} = d > 2R = 10$, часы не пересекаются и их стрелки не пересекаются ни в какой момент времени. Будем считать вторыми часы, которые идут точно, и первыми – часы, которые отстают от вторых на $T = 15$ минут. Обозначим O_1 и O_2 центры первых и вторых часов соответственно, M_1 и M_2 концы минутных стрелок первых и вторых часов соответственно. Выберем систему координат, в которой ось абсцисс сонаправлена с вектором $\overrightarrow{O_1O_2}$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{O_1Q} = \overrightarrow{O_2M_2}$, он соответствует минутной стрелке первых часов, показывающей точное время. Согласно условию, угол между векторами $\overrightarrow{O_1M_1}$ и $\overrightarrow{O_1Q}$ составляет $T = 15$ минут на часах. Одной минуте между минутными стрелками соответствует угол $\frac{360^{\circ}}{60} = 6^{\circ}$, тогда угол $\angle M_1O_1Q = T \cdot 6^{\circ}$. Требуется найти наибольшее и наименьшее расстояние между концами минутных стрелок, то есть наибольшую и наименьшую длину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.



Имеет место векторное равенство

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M_2} = \left(\overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_2M_2}\right) + \overrightarrow{O_1O_2} =$$

$$=\left(\overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1Q}\right) + \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{O_1O_2}.$$

По теореме косинусов найдем длину вектора $\overrightarrow{M_1Q}$:

$$\left|\overrightarrow{M_1Q}\right| = \left|\overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{O_1Q}\right| = \sqrt{M_1O_1{}^2 + O_1Q^2 - 2M_1O_1 \cdot O_1Q \cos \angle M_1O_1Q} =$$

$$= \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 6T^\circ} = 2R \sin 3T^\circ.$$

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ равен сумме двух векторов постоянной длины $\overrightarrow{O_1O_2}$ и $\overrightarrow{M_1Q}$, при этом угол между ними зависит только от угла φ между вектором $\overrightarrow{M_1Q}$ и положительным направлением оси абсцисс. Так как вектор $\overrightarrow{O_1Q}$ за час делает полный оборот, то φ принимает все значения от 0° до 360°, в частности в некоторые два момента времени $\overrightarrow{M_1Q}$ сонаправлен и противонаправлен вектору $\overrightarrow{O_1O_2}$, соответственно.

Заметим, что длина вектора $\overrightarrow{O_1O_2}$ больше длины вектора $\overrightarrow{M_1Q}$: $d > 2R > 2R \sin 3T^\circ$. Тогда по неравенству треугольника

$$d - 2R \sin 3T^\circ = \left|\overrightarrow{O_1O_2}\right| - \left|\overrightarrow{M_1Q}\right| \geq \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \geq \left|\overrightarrow{O_1O_2}\right| + \left|\overrightarrow{M_1Q}\right| = d + 2R \sin 3T^\circ.$$

При этом точные равенства достигаются в некоторые моменты времени. Тогда минимальное расстояние между концами минутных стрелок:

$$d_{min} = d - 2R \sin 3T^\circ = 5 - 2\sqrt{2} \sin 45^\circ = 5 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 - 2 = 3,$$

а максимальное расстояние между концами минутных стрелок:

$$d_{max} = d + 2R \sin 3T^\circ = 5 + 2\sqrt{2} \sin 45^\circ = 5 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 + 2 = 7.$$

Ответ: $d_{min} = d - 2R \sin 3T^\circ = 3$, $d_{max} = d + 2R \sin 3T^\circ = 7$.

Задача 2. Так как многочлен $Q(x)$ степени три, то по основной теореме алгебры он имеет ровно три корня, причем некоторые из них могут оказаться комплексными или могут совпадать. Аналогично, так как многочлен $P(x)$ степени три, то он имеет ровно три корня. Обозначим символами q_1, q_2, q_3 корни многочлена $Q(x)$, символами p_1, p_2, p_3 – корни многочлена $P(x)$. Тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = -2 \\ q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3 = -3 \\ q_1q_2q_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = -a \\ p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3 = b \\ p_1p_2p_3 = -c \end{cases}.$$

Согласно условию,

$$p_1 = q_2 + q_3\,, p_2 = q_1 + q_3, \; p_3 = q_1 + q_2\,,$$

тогда

$$a = -(p_1 + p_2 + p_3) = -2(q_1 + q_2 + q_3) = -2(-2) = 4,$$

$$\begin{aligned} b = p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3 &= (q_2+q_3)(q_1+q_3) + (q_1+q_3)(q_1+q_2) + (q_2+q_3)(q_1+q_3) = \\ &= (q_1 + 2)(q_2 + 2) + (q_2 + 2)(q_3 + 2) + (q_1 + 2)(q_3 + 2) = \\ &= q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3 + 4(q_1 + q_2 + q_3) + 12 = -3 + 4(-2) + 12 = 1, \end{aligned}$$

$\text{c} = -p_1p_2p_3 = (q_1+2)(q_2 + 2)(q_3 + 2) = q_1q_2q_3 + 2(q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3) + 4(q_1 + q_2 + q_3) + 8 == 1 + 2(-3) + 4(-2) + 8 = 1 - 6 - 8 + 8 = -5.$

Ответ: $a = 4, b = 1, \text{c} = -5.$

Задача 3. Если основание треугольника составляют n шаров, то их касается $n-1$ шар, которых в свою очередь сверху касается $n-2$ шара и т.д. до вершины треугольника, где расположен единственный шар. Количества шаров в каждом ряду образуют арифметическую прогрессию, и суммарное количество шаров в треугольнике

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = 153.$$

Получаем квадратное уравнение:

$$n^2 + n - 306 = 0.$$

Оно имеет два корня:

$$n = 17, n = -18.$$

Так как количество шаров n натуральное число, то $n = 17$.

Ответ: 17 шаров

Задача 4. Рассмотрим на плоскости два вектора $\vec{a} = \{x; y\}$ и $\vec{b} = \{z; t\}$, тогда, согласно условиям $x^2 + y^2 = 1,\ z^2 + t^2 = 4$, концы этих векторов лежат на окружностях радиуса 1 и 2 соответственно. Рассмотрим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi = xz + yt = -2 = -|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|.$$

Следовательно, $\cos\varphi = -1$, и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные и противоположные по направлению. Тогда

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \Rightarrow \vec{b} = -2\,\vec{a}.$$

Так как конец вектора $\vec{a}$, выпущенного из начала координат, лежит на единичной окружности, обозначим его координаты

$$\vec{a} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\};\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{b} = -2\{\cos\alpha, \sin\alpha\}.$$

Тогда $y = \sin\alpha\,; z = -2\cos\alpha$.

$$y + z = \sin\alpha - 2\cos\alpha = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right) = \sqrt{5}\sin(\alpha - \varphi),$$

где φ – любой угол, такой что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Так как угол α может принимать любые действительные значения, то угол $\alpha - \varphi$ также может принимать любые действительные значения, в частности, при $\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2}$ величина

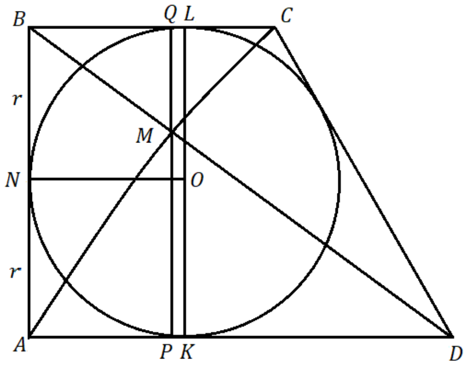
$$y + z = \sqrt{5}\sin(\alpha - \varphi) = \sqrt{5}$$

принимает наибольшее возможное значение. При этом

$$t = -2\sin\alpha = -2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -2\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Задача 5. Обозначим символом a, b, d длины сторон AD, BC, AB, соответственно. Пусть O – центр вписанной в трапецию $ABCD$ окружности ω радиуса r. Пусть K, L, N – основания перпендикуляров из O на основания трапеции BC, AD и AB, соответственно. Пусть P, Q – основания перпендикуляров из M на основания трапеции BC и AD, соответственно.



Так как OL и OK перпендикулярны одной прямой, тогда точки K, O, L лежат на одной прямой, перпендикулярной AD и параллельной AB. Тогда $ABLK$ – прямоугольник и $KL = AB = d$. Заметим, что K, L – это точки касания окружности ω сторон AD, BC. Тогда KL – диаметр ω и $d = 2r$.

Аналогично, $ABQP$ – прямоугольник и $PQ = AB = d$, $AP = BQ$. $ANOK$ – прямоугольник и $AK = ON = r$, $AN = OK = r$. $NBLO$ – прямоугольник и $BL = ON = r$, $BN = OL = r$.

Заметим, что ΔAMD подобен ΔCMB (по двум углам $\angle MAD = \angle MCB, \angle MDA = \angle MDC$) с коэффициентом подобия $\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{a}{b}$.

Также, ΔAPM подобен ΔCQM (по двум углам $\angle MAP = \angle MCL$, $\angle MPA = \angle MQC = 90^\circ$) с коэффициентом подобия $\frac{AP}{LC} = \frac{AM}{MC} = \frac{a}{b}$.

Следовательно, $\frac{AP}{LC} = \frac{AP}{BC-BL} = \frac{AP}{b-AP} = \frac{a}{b}$, откуда выразим $AP = \frac{ab}{a+b}$.

Так как O – центр вписанной в трапецию окружности, то он лежит на пересечении биссектрис углов трапеции; тогда CO и DO – биссектрисы углов $\angle BCD, \angle ADC$, соответственно. Следовательно, в ΔCOD угол $\angle COD = 180 - \angle OCD - \angle ODC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BCD + \angle ADC) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Тогда ΔDKO подобен ΔOLC по двум углам ($\angle DKO = \angle OLC = 90^\circ$, $\angle KDO = 90^\circ - \angle KOD = 180^\circ - 90^\circ - \angle KOD = \angle LOC$) и их стороны пропорциональны:

$$\frac{OK}{LC} = \frac{KD}{LO} \Rightarrow \frac{r}{b-r} = \frac{a-r}{r} \Rightarrow r = \frac{ab}{a+b} = AP.$$

Таким образом, $AK = AP$ и точки M, O лежат на одном перпендикуляре к основаниям трапеции. Тогда длина перпендикуляра из M на AB равна $AK = r = \frac{d}{2}$.

Найдем площадь ΔABM по длине основания $AB = d$ и длине $\frac{d}{2}$ высоты из M на AB:

$$S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^2}{4} = 1.$$

Ответ: $S = 1$.

Вариант 2

1. На стене висят двое одинаковых часов, длина минутных стрелок которых равна $\sqrt{3}$, а центры крепления их минутных стрелок удалены друг от друга на расстояние $\mathrm{d} = 6$. Известно, что одни часы отстают на 20 мин, а другие идут точно. Найти наибольшее и наименьшее расстояние между концами минутных стрелок, наблюдаемое в течение одного часа.

Ответ: $d_{min} = d - 2R\sin 3T^\circ = 3$, $d_{max} = d + 2R\sin 3T^\circ = 9$.

2. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx^2 + c$ имеет три корня, равные попарным произведениям корней многочлена $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x - 1$. Найти a, b, c.

Ответ: $a = 4, b = 1, \mathrm{c} = -1$.

3. На бильярдном столе из одинаковых 171 шаров выложен правильный треугольник. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен в треугольник и любая пара соседних шаров в треугольнике касаются друг друга. Сколько шаров составляют сторону треугольника?

Ответ: 18 шаров.

4. Четыре числа (x, y, z, t) удовлетворяют трем условиям:

$$x^2 + y^2 = 4,\ z^2 + t^2 = 4,\ \ xz + yt = -6.$$

Найти t, если известно, что $y + z$ принимает наименьшее возможное значение.

Ответ: $t = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

5. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с прямым углом при вершине A описана около окружности. Ее диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника ABM, если длина стороны AB равна 4.

Ответ: $S = 4$.

Вариант 3

1. На стене висят двое одинаковых часов, длина минутных стрелок которых равна $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, а центры крепления их минутных стрелок удалены друг от друга на расстояние $\mathrm{d} = 5$. Известно, что одни часы отстают на 5 мин, а другие идут точно. Найти наибольшее и наименьшее расстояние между концами минутных стрелок, наблюдаемое в течение одного часа.

Ответ: $d_{min} = d - 2R\sin 3T^\circ = 4$, $d_{max} = d + 2R\sin 3T^\circ = 6$.

2. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx^2 + c$ имеет три корня, равные квадратам корней многочлена $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. Найти a, b, c.

Ответ: $a = -10, b = 13, \mathrm{c} = -1$.

3. На бильярдном столе из одинаковых 190 шаров выложен правильный треугольник. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен в треугольник и любая пара соседних шаров в треугольнике касаются друг друга. Сколько шаров составляют сторону треугольника?

Ответ: 19 шаров.

4. Четыре числа (x, y, z, t) удовлетворяют трем условиям:

$$x^2 + y^2 = 9,\ z^2 + t^2 = 16,\ \ xz + yt = 12.$$

Найти t, если известно, что $y + z$ принимает наибольшее возможное значение.

Ответ: $t = \frac{12}{5}$.

5. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с прямым углом при вершине A описана около окружности. Ее диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника ABM, если длина стороны AB равна 6.
Ответ: $S = 9$.

Вариант 4

1. На стене висят двое одинаковых часов, длина минутных стрелок которых равна $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, а центры крепления их минутных стрелок удалены друг от друга на расстояние $\mathrm{d} = 7$. Известно, что одни часы отстают на 7,5 мин, а другие идут точно. Найти наибольшее и наименьшее расстояние между концами минутных стрелок, наблюдаемое в течение одного часа.
Ответ: $d_{min} = d - 2R\sin 3T^{\circ} = 5$, $d_{max} = d + 2R\sin 3T^{\circ} = 9$.
2. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx^2 + c$ имеет три корня, равные квадратам корней многочлена $Q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$. Найти a, b, c .
Ответ: $a = -18, b = 81, \mathrm{c} = -161$.
3. На бильярдном столе из одинаковых 190 шаров выложен правильный треугольник. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен в треугольник и любая пара соседних шаров в треугольнике касаются друг друга. Сколько шаров составляют сторону треугольника?
Ответ: 19 шаров
4. Четыре числа (x, y, z, t) удовлетворяют трем условиям:
$$x^2 + y^2 = 16,\ z^2 + t^2 = 25,\ \ xz + yt = 20.$$
Найти t, если известно, что $y + z$ принимает наименьшее возможное значение.
Ответ: $t = -\frac{20}{\sqrt{41}}$.
5. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с прямым углом при вершине A описана около окружности. Ее диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника ABM, если длина стороны AB равна 8.
Ответ: $S = 16$.

Олимпиада Росатом, математика, заключительный тур, 09.02.2025, 10 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:0 б – Рассмотрены частные случаи для положения стрелок. Нет существенных продвижений.

1 б – Нарисован чертеж. Введены обозначения, рассмотрен вектор, длину которого требуется оценить. Найдены некоторые оценки для длины искомого вектора или вектора O_1P.

$\leq$2 б – Введен параметр α для угла минутной стрелки и координаты вектора O_1P выражены через α. Получены неравенства, содержащие α, для оценки длины искомого вектора.

2 б – Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.

3 б - Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Введены обозначения, но продвижение в решении несущественно. Рассмотрены значения многочленов в некоторых точках.

1 б – Применена теорема Виета для многочленов P и Q.

2 б – Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Нарисован схематичный чертеж, нет существенных продвижений.

1 б – Применена формула суммы арифметической прогрессии для подсчета числа шаров.

2 б – Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.

3 б – Задача решена подбором верного ответа; сделана проверка, что ответ подходит (например, подсчитано общее количество шаров).

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

1 б – Доказано, что пары чисел (x, y) и (z, t) пропорциональны. Например, пары чисел рассмотрены в качестве векторов и применена формула скалярного произведения, или применено неравенство Коши-Буняковского, или другим способом доказано, что векторы (x, y) и (z, t) коллинеарны.

2 б – Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б – Нарисован чертёж.

1 б – Нарисован верный чертёж, соответствующий условию, и найдены некоторые подобные треугольники или .

1 б – Нарисован верный чертёж, соответствующий условию, и найдены некоторые подобные треугольники.

2 б – Доказано, что точка M и центр вписанной окружности лежат на одном перпендикуляре к сторонам AD, BC, или другим способом доказано, что расстояние от M до AB равно радиусу.

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.