Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 8 класс

Вариант 1.

1. Тетя Маша продавала мороженое ребятам на следующих условиях: если ты, купив мороженое, потом приводишь трех своих друзей, и они также купят мороженое, то тебе возвращаются потраченные деньги. Покупатели разделились на пришедших самостоятельно и приведенных своими друзьями. Пришли самостоятельно – 11 ребят, а среди «приведенных» – 45 покупателей, которые в дальнейшем никого не привели. Сколько ребят получили мороженое бесплатно?

2. Найти наименьшее целое число, кратное 1944, половина которого является квадратом целого числа, а шестая часть – кубом целого числа.

3. Найти приведенный квадратный трехчлен вида $P(x)=x^2+ax+b$ с целыми коэффициентами, имеющий целые корни, для которого многочлен $Q(x)=P(x)+c(x+2)$ также имеет целые корни при любых целых c.

4. На тарелке лежат одиннадцать кусков колбасы. Петя и Ваня решили разделить колбасу между собой поровну (по весу). Петя взялся разделить колбасу с условием, что резать придётся не более одного куска, и разделил. А вы можете это сделать? (предполагается, что в доме есть весы).

5. Прямая, параллельная основанию AC треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и BC в точках M и N соответственно и разбивает треугольник на две части: треугольник с площадью 1 и трапецию с площадью 3. Диагонали AN и CM трапеции пересекаются в точке P. Найти площадь треугольника AMP.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть x - число ребят, получивших мороженное бесплатно. Тогда общее число покупателей равно с одной стороны $kx+a$, а с другой $x+b$. Приравнивая эти выражения, получим $x=\dfrac{b-a}{k-1}=\dfrac{45-11}{2}=17$.

Ответ: 17 .

Задача 2. Искомое число находится среди чисел вида $a=2^p\cdot 3^q$, поскольку оно должно делится на 2 и на 3.

Условие 1. Искомое число кратно числу $1944=2^3\cdot 3^5$. Следовательно $p\geq 3, q\geq 5$.

Условие 2. Половина искомого числа является квадратом целого числа, поэтому $p=2k+1, q=2m$.

Условие 3. Шестая часть искомого числа является кубом целого числа, поэтому $p-1=3u$, $q-1=3v, u,v\in Z$.

В итоге получаем уравнения на переменные p и q:

1) $2k+1=3u+1$ или $2k=3u$. Отсюда получаем $\begin{cases} k=3s, \\ u=2s, \end{cases}$ $s\in Z$. Тогда $p=6s+1,\ s\in Z$. Так как $p\geq 3$, то $s\geq 1$. Поэтому $p_{\min}=7$.

2) $2m-1=3v$. Отсюда получаем $\begin{cases} m=2+3t \\ v=1+2t \end{cases}, t\in Z$. Тогда $q=6t+4, t\in Z$. Так как $q\geq 5$, то $t\geq 1$.

Потому $q_{\min}=10$.

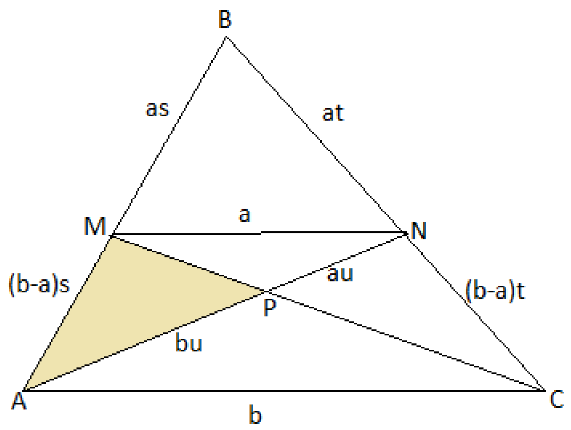
Ответ: $a_{\min}=2^7\cdot 3^{10}$.

Задача 3. Если многочлен $P(x)$ имеет корень $x=-2$, то $4-2a+b=0\to b=2(a-2)$, то многочлен $Q(x)=x^2+(a+c)x+2(a+c-2)$ имеет корни $x_1=-2, x_2=2-a-c$ и они целые. Таким образом, многочлен $P(x)=x^2+ax+2(a-2)$ при любом целом a искомый, поскольку он с целыми коэффициентами и имеет два целых корня -2 и $2-a$. Полагая, например, $a=1$, получим $P(x)=x^2+x-2$.

Ответ: $P(x)=x^2+ax+2(a-2), a\in Z$, например, $P(x)=x^2+x-2$.

Задача 4. Пусть $x_1, x_2, ..., x_{11}$ – веса кусков колбасы, упорядоченных по возрастанию. Откладываем в сторону кусок колбасы с наибольшим весом x_{11}, его и будем потом резать. Раскладываем остальные куски по двум кучкам по следующему принципу: первый кусок с весом x_1 Ване, второй весом x_2 – Пете. Следующий кусок с весом x_3 – Ване (у него было меньше). Если у Вани по-прежнему оказалось меньше, следующий кусок опять пойдет ему. Если у Вани стало колбасы больше, чем у Пети, то последующие куски пойдут к Пете до тех пор, пока у него станет колбасы больше, чем у Вани. Процесс продолжается до куска с весом x_{10}. Следующий этап дележа – выравнивание кучек. Перекладыванием пар кусков колбасы, принадлежащим разным кучкам, можно добиться, чтобы разница между суммарными весами кучек не превосходил x_{10}. Пусть a_1 – вес кучки Пети, a_2 – вес кучки Вани, например, $a_1>a_2, a_1-a_2\leq x_{10}\leq x_{11}$. Тогда от куска с весом x_{11} надо отрезать кусок весом $\frac{a_2-a_1+x_{11}}{2}$ и добавить его к кучке Пети, оставшуюся его часть весом $\frac{x_{11}+a_1-a_2}{2}$ необходимо добавить к кучке Вани. Вес обоих кучек сравняется: $a_1+\frac{a_2-a_1+x_{11}}{2}=a_2+\frac{x_{11}+a_1-a_2}{2}$.

Задача 5. Введем обозначения: $MN=a, AC=b$ – длины оснований трапеции, S_1 –площадь треугольника MNB, S_2 –площадь трапеции $ACMN$.



Из подобия треугольников MNP и APC имеем $\frac{AP}{PN}=\frac{b}{a}$. Тогда $S_{AMP}=\frac{b}{a+b}S_{AMN}$.

Из подобия треугольников MNB и ABC имеем $\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{a}{b}$. Тогда $S_{AMN}=\dfrac{b-a}{b}S_{ABN}$.

Из подобия треугольников MNB и ABC имеем $\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{a}{b}$. Тогда $S_{ABN}=\dfrac{a}{b}S_{ABC}$.

В итоге получаем $S_{AMP}=\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{b-a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}S_{ABC}=\dfrac{(1-\lambda)\lambda}{1+\lambda}S_{ABC}=\dfrac{4(1-\lambda)\lambda}{1+\lambda}$ (здесь $\lambda=a/b$).

Найдем $\lambda:\lambda^2=\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{S_1}{S_1+S_2}=\dfrac{1}{4}\to\lambda=\dfrac{1}{2}$. В итоге находим $S_{AMP}=\dfrac{4(1-\lambda)\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{1}{3/2}=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $S_{AMP}=\dfrac{2}{3}$

Вариант 2

1. Тетя Маша продавала мороженое ребятам на следующих условиях: если ты, купив мороженое, потом приводишь четырех своих друзей, и они также купят мороженое, то тебе возвращаются потраченные деньги. Покупатели разделились на пришедших самостоятельно и приведенных своими друзьями. Пришли самостоятельно -23 ребенка, а среди «приведенных» -47 покупателей, которые в дальнейшем никого не привели. Сколько ребят получили мороженое бесплатно?
Ответ: 8.
2. Найти наименьшее целое число, кратное 10125, треть которого является кубом целого числа, а пятнадцатая часть – квадратом целого числа.
Ответ: $a_{\min}=3^7\cdot5^3$.
3. Найти приведенный квадратный трехчлен вида $P(x)=x^2+ax+b$ с целыми коэффициентами, имеющий целые корни, для которого многочлен $Q(x)=P(x)+c(x+3)$ также имеет целые корни при любых целых c.

Ответ: $P(x)=x^2+ax+3(a-3), a\in Z$, например, $P(x)=x^2+x-6$.
4. На тарелке лежат тринадцать кусков колбасы. Петя и Ваня решили разделить колбасу между собой поровну (по весу). Петя взялся разделить колбасу с условием, что резать придётся не более одного куска, и разделил. А вы можете это сделать? (предполагается, что в доме есть весы).
5. Прямая, параллельная основанию AC треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и BC в точках M и N соответственно и разбивает треугольник на две части: треугольник с площадью 1 и трапецию с площадью 8. Диагонали AN и CM трапеции пересекаются в точке P. Найти площадь треугольника AMP.

Ответ: $S_{AMP}=\dfrac{3}{2}$.

Вариант 3

1. Тетя Маша продавала мороженое ребятам на следующих условиях: если ты, купив мороженое, потом приводишь пять своих друзей, и они также купят мороженое, то тебе возвращаются потраченные деньги. Покупатели разделились на пришедших самостоятельно и приведенных своими друзьями. Пришли самостоятельно -25 детей, а среди «приведенных» -45 покупателей, которые в дальнейшем никого не привели. Сколько ребят получили мороженое бесплатно?
Ответ: 5.

2. Найти наименьшее целое число, кратное 1372, половина которого является кубом целого числа, а четырнадцатая часть – пятой степенью целого числа.

Ответ: $a_{\min} = 2^{16} \cdot 7^6$.

3. Найти приведенный квадратный трехчлен вида $P(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами, имеющий целые корни, для которого многочлен $Q(x) = P(x) + c(x+4)$ также имеет целые корни при любых целых c.

Ответ: $P(x) = x^2 + ax + 4(a-4), a \in Z,$ например, $P(x) = x^2 + x - 12$.

4. На тарелке лежат пятнадцать кусков колбасы. Петя и Ваня решили разделить колбасу между собой поровну (по весу). Петя взялся разделить колбасу с условием, что резать придётся не более одного куска, и разделил. А вы можете это сделать? (предполагается, что в доме есть весы).

5. Прямая, параллельная основанию AC треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и BC в точках M и N соответственно и разбивает треугольник на две части: треугольник с площадью 2 и трапецию с площадью 6. Диагонали AN и CM трапеции пересекаются в точке P. Найти площадь треугольника AMP.

Ответ: $S_{AMP} = \frac{4}{3}$.

Вариант 4

1. Тетя Маша продавала мороженое ребятам на следующих условиях: если ты, купив мороженое, потом приводишь шесть своих друзей, и они также купят мороженое, то тебе возвращаются потраченные деньги. Покупатели разделились на пришедших самостоятельно и приведенных своими друзьями. Пришли самостоятельно -18 детей, а среди «приведенных» -53 покупателей, которые в дальнейшем никого не привели. Сколько ребят получили мороженое бесплатно?

Ответ: 7.

2. Найти наименьшее целое число, кратное 1225, пятая часть которого является четвертой степенью целого числа, а тридцать пятая часть – пятой степенью целого числа.

Ответ: $a_{\min} = 5^{21} \cdot 7^{16}$.

3. Найти приведенный квадратный трехчлен вида $P(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами, имеющий целые корни, для которого многочлен $Q(x) = P(x) + c(x+5)$ также имеет целые корни при любых целых c.

Ответ: $P(x) = x^2 + ax + 5(a-5), a \in Z,$ например, $P(x) = x^2 + x - 20$.

4. На тарелке лежат девять кусков колбасы. Петя и Ваня решили разделить колбасу между собой поровну (по весу). Петя взялся разделить колбасу с условием, что резать придётся не более одного куска, и разделил. А вы можете это сделать? (предполагается, что в доме есть весы).

5. Прямая, параллельная основанию AC треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и BC в точках M и N соответственно и разбивает треугольник на две части: треугольник с площадью 4 и трапецию с площадью 5. Диагонали AN и CM трапеции пересекаются в точке P. Найти площадь треугольника AMP.

Ответ: $S_{AMP} = \frac{6}{5}$.

Олимпиада Росатом, математика, заключительный тур, 09.02.2025, 8 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – неверные предположения или незначительное продвижение;

1 б – верно и обоснованно составлено одно выражение общего числа покупателей

2 б – верно и обоснованно составлены оба выражения для общего числа покупателей, но решение найдено с ошибкой или имеется недостаточное обоснование выражений;

3 б – Задача решена верно и полностью обоснованно.

Задача 2:

0 б – попытки решения подбором;

1 б – разложил число на простые множители и составил уравнения по условию задачи;

2 б – обосновал ограничения, вытекающие из условий задачи, учел их при нахождении числа, но сделал финальную ошибку или имеется недостаточное обоснование;

3 б - задача решена верно и обоснованно.

Задача 3:

0 б – попытки решить подбором;

1 б – имеются некоторые верные наводящие соображения, не получившие достаточного развития, например, что-то про общий корень $P(x)$ и $c(x-x_0)$;

2 б –получен какой-либо верный многочлен на основе верных рассуждений, но не отмечено, что решений бесконечно много или имеется недостаточное обоснование;

3 б – показано, что решений бесконечно много и приведено одно или несколько подходящих.

Задача 4:

0 б – любой невнятно описанный алгоритм;

1 б – предложен разумный начальный дележ без фазы уравнивания;

2 б – формально полностью описана дальнейшая фаза уравнивания, но допущена небольшая ошибка в формуле;

3 б — четко прописан верный алгоритм с верной финальной формулой.

Задача 5:

0 б – только рисунок;

1 б – грамотно сделан рисунок, позволяющий составить соотношения подобия и сделаны некоторые попытки составить эти соотношения;

2 б – обоснованно составлены все необходимые соотношения подобия, но сделана финальная арифметическая ошибка; или имеется недостаточное обоснование подобия;

3 б – задача решена обоснованно и получен верный ответ.