Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 9 класс

Вариант 1.

1. Вода на садовые участки подается из водонапорной башни, которая в начале сезона заполняется водой с помощью насоса, производительность которого за сутки постоянная. Суточное потребление воды на каждом участке, где живут садоводы, одинаковое. Известно, что если воду потребляют 109 участков, то она заканчивается через 2 дня. В случае, если вода подается только на 35 участков, ее хватает на 6 дней. Сколько дней мог бы пользоваться водой хозяин участка, если бы он жил в садовом товариществе один?

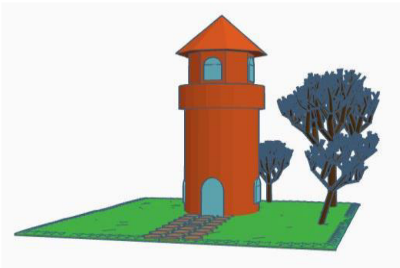
2. Представить квадратный трехчлен $P(x)=x^2+4x-5$ в виде суммы двух квадратных трехчленов с нулевыми дискриминантами.

3. Имеется 153 положительных числа, сумма которых 918. Из них отобрали 127 самых больших и нашли число s – их сумму. Найти наименьшее возможное значение числа s.

4. Правильный треугольник площади $\sqrt{3}$ разбит произвольным образом на правильные треугольники. Найти наименьшее возможное значение суммы площадей кругов, описанных около этих треугольников.

5. Три стороны выпуклого четырехугольника имеют длины $2, 4$ и 5. Известно, что существует круг, пересекающий все стороны четырехугольника по хордам, имеющим одинаковые длины. Найти наибольшее возможное значение длины четвертой стороны.

Ответы и решения



Задача 1. 1 метод. Пусть A – объём воды в башне, p – производительность насоса в сутки, а один участок потребляет одно и тоже количество воды в сутки q. Составим систему по условиям задачи: $\begin{cases} A+2p=109\cdot 2\cdot q, \\ A+6p=35\cdot 6\cdot q, \end{cases}$ вычитая из второго уравнения системы первое, получим: $4p=-2\cdot 4q,\ p=-2q.$ Видимо, насос работает с дефектом.

Найдём $A+2\cdot(-2q)=109\cdot 2\cdot q,\ A=(218+4)\,q,\ A=222q.$

Запишем уравнение, реализующее ответ на вопрос задачи. Пусть n – число дней, когда пользоваться водой может один хозяин участка, если бы только он жил в садовом товариществе, значит $A+np=1\cdot n\cdot q$. Подставим в это уравнение значение $A=222q$ и $p=-2q$:

$$222q+n(-2q)=1\cdot n\cdot q,\qquad \text{разделив на } q,\ 3n=222,\qquad n=74.$$

2 метод. В общем виде. Пусть A – объем башни, $pA,\ p\in[0;1]$ – объем воды, потребляемой на одном участке за один день, $qA,\ q\in[0;1]$ – производительность насоса в сутки. Участков всего – m штук, а потребление воды происходит n дней.

Условия:

$$\begin{cases} A+qAn_1 = pAm_1n_1 \\ A+qAn_2 = pAm_2n_2 \end{cases} \to \begin{cases} 1 = pm_1n_1 - qn_1 \\ 1 = pm_2n_2 - qn_2 \end{cases} \to \begin{cases} p = \dfrac{n_2 - n_1}{n_1n_2(m_1 - m_2)} \\ q = \dfrac{m_2n_2 - m_1n_1}{n_1n_2(m_1 - m_2)} \end{cases}$$

Пусть n – искомое число для $m=1$. Тогда

$$1+qn = pn \to n(p-q) = 1 \to n = \frac{1}{p-q} = \frac{n_1n_2(m_1-m_2)}{n_1(m_1-1)-n_2(m_2-1)} \; .$$

Ответ: 74 дня.

Задача 2. **1 метод.** Заметим, что дискриминант равен нулю, если квадратный трёхчлен вида cx^2 $(c \neq 0)$ или $a(x+b)^2$ $(a \neq 0)$. Будем искать решение в виде

$$P(x) = a(x+b)^2 + cx^2.$$

Тогда

$$\begin{cases} a+c=1, \\ 2ab=4, \\ ab^2=-5. \end{cases} \begin{cases} a+c=1, \\ ab=2, \\ ab^2=-5. \end{cases}$$

Подставим второе уравнение системы в третье:

$$\begin{cases} a+c=1, \\ ab=2, \\ 2b=-5. \end{cases}$$

Значит, $b=-\frac{5}{2}, a=-\frac{4}{5}, c=\frac{9}{5},$ а $P(x) = -\frac{4}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{5}x^2.$

2 метод. В общем виде. Выделим полный квадрат $x^2+4x-5=(x+2)^2-9$ и сделаем замену $t=x+2$. Заметим, что, если $\tilde{P}(t)=t^2-9$ можно представить в виде суммы двух многочленов $A(t-t_1)^2$ и $B(t-t_2)^2$ с нулевыми дискриминантами с некоторыми константами A, B, t_1, t_2, то возврат к переменной $x=t-2$ даст искомые многочлены.

$$t^2-9 = A(t-t_1)^2 + B(t-t_2)^2 = (A+B)t^2 - 2(At_1+Bt_2)t + At_1^2 + Bt_2^2$$

Сравнивая коэффициенты, получим систему

$$\begin{cases} A+B=1 \\ At_1+Bt_2=0 \\ At_1^2+Bt_2^2=-9 \end{cases}$$

из трех уравнений с неизвестными A, B, t_1, t_2.

Полагая, например, $t_2=2$, получим $B=-\dfrac{At_1}{2}$ и

$$\begin{cases} At_1^2 - 2At_1 + 9 = 0 \\ At_1 = 2(A-1) \end{cases} \to 2(A-1)t_1 - 4(A-1) + 9 = 0 \to t_1 = \frac{4(A-1)-9}{2(A-1)} =$$

$$= \frac{2(A-1)}{A} \to 4A(A-1) - 9A = 4(A-1)^2 \to A = -\frac{4}{5} \to B = \frac{9}{5} \to t_1 = \frac{9}{2}$$

Тогда

$$\tilde{P}(t) = t^2 - 9 = -\frac{4}{5}\left(t - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{9}{5}(t-2)^2 \to P(x) = -\frac{4}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{5}x^2.$$

Ответ: $P(x) = -\frac{4}{5}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{5}x^2.$

Задача 3. Пусть все числа равны, обозначим каждое такое число x. По условию задачи $153 \cdot x = 918$. Тогда $x = 918{:}\,153 = 6$, а сумма 127 самых больших чисел равна $127 \cdot 6 = 762$. Докажем, что эта сумма наименьшее возможное значение.

Пусть существует набор из 153 положительных чисел сумма которых 918, одно из которых меньше 6 (например, 5), а остальные числа равны 6 и одно число равно 7. Тогда сумма наибольших чисел равна 763, что иллюстрирует, что при выборе чисел меньше 6 сумма наибольших чисел будет только расти.

Пусть $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{153}$ – заданные числа, записанные в порядке возрастания, тогда сумма наибольших 127 чисел – S_2 , а сумма наименьших 26 – S_1. Отношение

$$\frac{S_1}{S_2} \le \frac{26 \cdot x_{26}}{127 \cdot x_{27}} \le \frac{26}{127}.$$

$$\frac{S_2}{S_1+S_2} \ge \frac{127}{153} \text{ или } S_2 \ge \frac{127}{153}(S_1+S_2) = \frac{127}{153} \cdot 918 = 762.$$

Ответ: 762.

Задача 4. Рассмотрим правильный треугольник со стороной a. Пусть треугольник разбит на n правильных треугольников со стороной a_k и площадью $s_k = \frac{\sqrt{3}a_k^2}{4}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

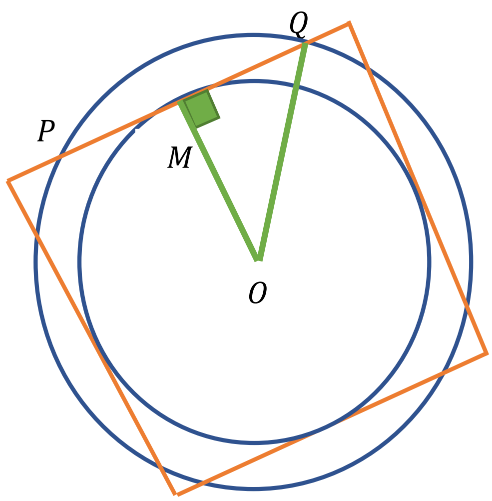
$$\sqrt{3} = \sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \to \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 4 \to R_k^2 = \frac{a_k^2}{3} \to \pi\sum_{k=1}^{n} R_k^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Сумма квадратов сторон треугольников не зависит от способа разбиения.

Ответ: $\frac{4\pi}{3}$.

Задача 5. Пусть O – центр круга радиуса R, PQ – одна из равных четырех хорд, OM – срединный перпендикуляр к отрезку PQ, a – длина отрезка PQ, r – длина OM .

Отметим, что центр заданной окружности равноудалён от точек пересечения с каждой хордой.



Точка O равноудалена от точек P и Q, поэтому она лежит на срединном перпендикуляре OM. Значит, точка O равноудалена на расстояние $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ от сторон четырехугольника и в него можно вписать окружность.

Суммы длин противоположных сторон четырехугольника равны по свойству четырёхугольника, описанного около окружности.

Пусть x – длина четвертой стороны. Возможны три варианта:

1) $2 + 5 = 4 + x$, $x = 3$;
2) $4 + 5 = 2 + x$, $x = 7$;
3) $2 + 4 = 5 + x$, $x = 1$. Наибольшее значение 7.

Ответ: 7.

Вариант 2

1. Вода на садовые участки подается из водонапорной башни, которая в начале сезона заполняется водой с помощью насоса, производительность которого за сутки постоянная. Суточное потребление воды на каждом участке, где живут садоводы, одинаковое. Известно, что если воду потребляют 85 участков, то она заканчивается через 3 дня. В случае, если вода подается только на 34 участка, ее хватает на 7 дней. Сколько дней мог бы пользоваться водой хозяин участка, если бы он жил в садовом товариществе один?

Ответ: 51 день.

2. Представить квадратный трехчлен $P(x) = -3x^2 - 18x + 3$ в виде суммы двух квадратных трехчленов с нулевыми дискриминантами.

Ответ: $P(x) = 2(x-2)^2 - 5(x+1)^2$.

3. Имеется 172 положительных числа, сумма которых 860. Из них отобрали 155 самых больших и нашли число s – их сумму. Найти наименьшее возможное значение числа s.

Ответ: 775.

4. Правильный треугольник площади $6\sqrt{3}$ разбит произвольным образом на правильные треугольники. Найти наибольшее возможное значение суммы квадратов радиусов, вписанных в эти треугольники окружностей.

Ответ: 2.

5. Три стороны выпуклого четырехугольника имеют длины 3,5 и 7. Известно, что существует круг, пересекающий все стороны четырехугольника по хордам, имеющим одинаковые длины. Найти наибольшее возможное значение длины четвертой стороны.

Ответ: 9.

Вариант 3

1. Вода на садовые участки подается из водонапорной башни, которая в начале сезона заполняется водой с помощью насоса из скважины, производительность которого за сутки постоянная. Суточное потребление воды на каждом участке, где живут садоводы, одинаковое. Известно, что если воду потребляют 73 участка, то она заканчивается через 4 дня. В случае, если вода подается только на 33 участка, ее хватает на 8 дней. Сколько дней мог бы пользоваться водой хозяин участка, если бы он жил в садовом товариществе один?

Ответ: 40 дней.

2. Представить квадратный трехчлен $P(x) = 8x^2 - 26x + 23$ в виде суммы двух квадратных трехчленов с нулевыми дискриминантами.

Ответ: $P(x) = 3(x-1)^2 + 5(x-2)^2$.

3. Имеется 165 положительных чисел, сумма которых 660. Из них отобрали 134 самых больших и нашли число s – их сумму. Найти наименьшее возможное значение числа s.
Ответ: 536.

4. Правильный треугольник площади $12\sqrt{3}$ разбит произвольным образом на правильные треугольники. Найти наименьшее возможное значение суммы квадратов радиусов, описанных около этих треугольников окружностей.
Ответ: 16.

5. Три стороны выпуклого четырехугольника имеют длины $4, 7$ и 10. Известно, что существует круг, пересекающий все стороны четырехугольника по хордам, имеющим одинаковые длины. Найти наибольшее возможное значение длины четвертой стороны.
Ответ: 13.

Вариант 4

1. Вода на садовые участки подается из водонапорной башни, которая в начале сезона заполняется водой с помощью насоса из скважины, производительность которого за сутки постоянная. Суточное потребление воды на каждом участке, где живут садоводы, одинаковое. Известно, что если воду потребляют 49 участков, то она заканчивается через 5 дней. В случае, если вода подается только на 26 участков, ее хватает на 8 дней. Сколько дней мог бы пользоваться водой хозяин участка, если бы он жил в садовом товариществе один?
Ответ: 23 дня.

2. Представить квадратный трехчлен $P(x) = x^2 - 16x + 10$ в виде суммы двух квадратных трехчленов с нулевыми дискриминантами.
Ответ: $P(x) = -2(x+1)^2 + 3(x-2)^2$.

3. Имеется 143 положительных числа, сумма которых 429. Из них отобрали 111 самых больших и нашли число s – их сумму. Найти наименьшее возможное значение числа s.
Ответ: 33.

4. Правильный треугольник площади $3\sqrt{3}$ разбит произвольным образом на правильные треугольники. Найти наибольшее возможное значение суммы площадей, вписанных в эти треугольники кругов.
Ответ: π.

5. Три стороны выпуклого четырехугольника имеют длины $5, 9$ и 11. Известно, что существует круг, пересекающий все стороны четырехугольника по хордам, имеющим одинаковые длины. Найти наибольшее возможное значение длины четвертой стороны.
Ответ: 15.

Олимпиада Росатом, математика, заключительный тур, 09.02.2025, 9 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Верно составлена математическая модель (уравнение, система уравнений или неравенств).

2б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Угадан ответ (записан ответ без решения)

1 б – Верно указан полный квадрат выражения (плюс или минус константа).

2 б – Выражение представлено в виде суммы двух квадратов выражений, с арифметической ошибкой.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Записана математическая модель задачи.

2 б – Найдена сумма, отличающаяся от верного значения на ± 10.

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б - Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Верно записана формула площади правильного треугольника со стороной a.

2 б – Записано соотношение между a_k^2 и R_k^2 для каждого k-го элемента.

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б -Нарисован чертёж.

1 б – Найдено значение $r_{\text{вписанной окружности}} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$.

2 б – Найдено одно из верных значений длины четвёртой стороны.

3 б - Задача решена верно.