

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, 10 класс**

Вариант 1.

1. На стене висят двое одинаковых часов, длина минутных стрелок которых равна $\sqrt{2}$, а центры крепления их минутных стрелок удалены друг от друга на расстояние $d = 5$. Известно, что одни часы отстают на 15 мин, а другие идут точно. Найти наибольшее и наименьшее расстояние между концами минутных стрелок, наблюдаемое в течение одного часа.

2. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx^2 + c$ имеет три корня, равные попарным суммам корней многочлена $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. Найти a, b, c .

3. На бильярдном столе из одинаковых 153 шаров выложен правильный треугольник. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен в треугольник и любая пара соседних шаров в треугольнике касаются друг друга. Сколько шаров составляют сторону треугольника?

4. Четыре числа (x, y, z, t) удовлетворяют трем условиям:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 + t^2 = 4, \quad xz + yt = -2.$$

Найти t , если известно, что $y + z$ принимает наибольшее возможное значение.

5. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с прямым углом при вершине A описана около окружности. Ее диагонали AC и BD пересекаются в точке M . Найти площадь треугольника ABM , если длина стороны AB равна 2.

Вариант 2

1. На стене висят двое одинаковых часов, длина минутных стрелок которых равна $\sqrt{3}$, а центры крепления их минутных стрелок удалены друг от друга на расстояние $d = 6$. Известно, что одни часы отстают на 20 мин, а другие идут точно. Найти наибольшее и наименьшее расстояние между концами минутных стрелок, наблюдаемое в течение одного часа.

2. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx^2 + c$ имеет три корня, равные попарным произведениям корней многочлена $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x - 1$. Найти a, b, c .

3. На бильярдном столе из одинаковых 171 шаров выложен правильный треугольник. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен в треугольник и любая пара соседних шаров в треугольнике касаются друг друга. Сколько шаров составляют сторону треугольника?

4. Четыре числа (x, y, z, t) удовлетворяют трем условиям:

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z^2 + t^2 = 4, \quad xz + yt = -6.$$

Найти t , если известно, что $y + z$ принимает наименьшее возможное значение.

5. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с прямым углом при вершине A описана около окружности. Ее диагонали AC и BD пересекаются в точке M . Найти площадь треугольника ABM , если длина стороны AB равна 4.

Вариант 3

1. На стене висят двое одинаковых часов, длина минутных стрелок которых равна $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, а центры крепления их минутных стрелок удалены друг от друга на расстояние $d = 5$. Известно, что одни часы отстают на 5 мин, а другие идут точно. Найти наибольшее и наименьшее расстояние между концами минутных стрелок, наблюдаемое в течение одного часа.

2. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx^2 + c$ имеет три корня, равные квадратам корней многочлена $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. Найти a, b, c .

3. На бильярдном столе из одинаковых 190 шаров выложен правильный треугольник. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен в треугольник и любая пара соседних шаров в треугольнике касаются друг друга. Сколько шаров составляют сторону треугольника?

4. Четыре числа (x, y, z, t) удовлетворяют трем условиям:

$$x^2 + y^2 = 9, \quad z^2 + t^2 = 16, \quad xz + yt = 12.$$

Найти t , если известно, что $y + z$ принимает наибольшее возможное значение.

5. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с прямым углом при вершине A описана около окружности. Ее диагонали AC и BD пересекаются в точке M . Найти площадь треугольника ABM , если длина стороны AB равна 6.

Вариант 4

1. На стене висят двое одинаковых часов, длина минутных стрелок которых равна $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, а центры крепления их минутных стрелок удалены друг от друга на расстояние $d = 7$. Известно, что одни часы отстают на 7,5 мин, а другие идут точно. Найти наибольшее и наименьшее расстояние между концами минутных стрелок, наблюдаемое в течение одного часа.

2. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx^2 + c$ имеет три корня, равные квадратам корней многочлена $Q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$. Найти a, b, c .

3. На бильярдном столе из одинаковых 190 шаров выложен правильный треугольник. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен в треугольник и любая пара соседних шаров в треугольнике касаются друг друга. Сколько шаров составляют сторону треугольника?

4. Четыре числа (x, y, z, t) удовлетворяют трем условиям:

$$x^2 + y^2 = 16, \quad z^2 + t^2 = 25, \quad xz + yt = 20.$$

Найти t , если известно, что $y + z$ принимает наименьшее возможное значение.

5. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с прямым углом при вершине A описана около окружности. Ее диагонали AC и BD пересекаются в точке M . Найти площадь треугольника ABM , если длина стороны AB равна 8.