Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Отборочный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 8 класс

Вариант 1.

1. Пункты A и B расположены на круговой трассе. Два приятеля выехали одновременно на велосипедах: Андрей из A в B, а Боря – из B в A навстречу друг другу. Они встретились, когда часы показывали 13 часов, и каждый продолжил свое движение до конечного пункта. Андрей прибыл в пункт B спустя 2 часа после встречи, а Боря прибыл в пункт A спустя 12 часов после начала движения. Сколько времени показывали часы, когда они отправились в путь?

2. Черепаха Тартилла прожила 300 лет. Буратино выбрал из них счастливые по принципу: разность любых двух счастливых лет должна быть составным числом. Какое максимальное число счастливых, по мнению Буратино, лет могла прожить черепаха?

3. В 7[а] классе 23 ученика. В понедельник все писали диктант, причем не нашлось двух учеников, сделавших в диктанте одинаковое количество ошибок, каждый сделал хотя бы одну ошибку, а общее число ошибок в классе оказалось равным 276. Учитель разделил класс на две группы. В первую попали те, кто сделал ошибок больше, чем любой ученик из второй группы и только им была выставлена за диктант двойка. Сколько двоек поставил учитель в классе, если число ошибок, допущенных учениками первой и второй групп, отличается по абсолютному значению на 4?

4. У вас имеется компьютер, выполняющий с числами только пять операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Придумайте формулу, по которой компьютер мог определить наибольшее число в паре $(a;b)$ для любых чисел a и b.

5. Точка O расположена внутри правильного треугольника ABC на расстоянии 2 от вершины A. Площади треугольников OAB и OAC равны $3\sqrt{3}$ и $5\sqrt{3}$ соответственно. Найти площадь треугольника со сторонами равными отрезкам OA, OB и OC.

Ответы и решения

Задача 1. Введем обозначения: S – расстояние между пунктами A и B, x – расстояние от пункта A до места встречи велосипедистов, v_1 – скорость Андрея, v_2 – скорость Бори, t – время, которое велосипедисты проехали до места встречи. Составим систему уравнений по условию задачи:

$$\begin{cases} v_1 t = x, \\ v_2 t = S - x, \\ 2v_1 = S - x, \\ 12v_2 = S. \end{cases}$$

Исключим из этих уравнений S и x:

$$\begin{cases} v_2 t = 12v_2 - v_1 t, \\ v_2 t = 2v_1. \end{cases}$$

Теперь исключим v_1: $v_2 t = 12v_2 - \frac{v_2 t^2}{2}$. После сокращения на v_2 и несложных преобразований получим уравнение: $t^2 + 2t - 24 = 0$. Это уравнение имеет два решения $t_1 = 4, t_2 = -6$. Условию задачи удовлетворяет решение $t_1 = 4$. Это время, которое велосипедисты проехали до места встречи. По условию задачи они встретились в 13 часов, следовательно, в путь велосипедисты отправились в 9 часов.
Ответ: 9 часов.

Задача 2. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – максимальная цепочка номеров счастливых для черепахи лет, расположенная в порядке возрастания. Без ограничения общности, можно полагать, что $x_1 = 1$. В противном случае сдвинем всю цепочку на $(x_1 - 1)$ влево: при сдвиге статус «счастливого года» и их количество не меняется, а первый год в цепочке становится счастливым. Сохраним для сдвинутой цепочки прежние обозначения. Тогда $x_k \in [1;300], k = 1, 2, ..., n$. Разобьем $[1;300]$ на отрезки вида $[4m+1; 4m+4], m = 0, 1, ..., 74$ (по четверкам). На каждом из отрезков находится не более одного числа, соответствующего счастливому году (разность между любыми двумя числами из одного отрезка – простое число). Поэтому максимальное число счастливых лет равно количеству полных четверок на отрезке жизни, если он кратен 4, и частному от деления длины отрезка жизни (целое число лет) на 4 плюс единица (в неполной четверке есть один счастливый год), если оно не кратно 4. При этом номера счастливых лет укладываются в одну из прогрессий:

$$1, 5, 9, ..., 4(k-1)+1, ..., 4 \cdot 74 + 1 = 297;$$

$$2, 6, 10, ..., 4(k-1)+2, ..., 4 \cdot 74 + 2 = 298;$$

$$3, 7, 11, ..., 4(k-1)+3, ..., 4 \cdot 74 + 3 = 299;$$

$$4, 8, 12, ..., 4(k-1)+4, ..., 4 \cdot 74 + 4 = 300.$$

Количество членов в каждой из этих прогрессий равно 75.
Ответ: 75.
Задача 3. По условию задачи все ученики класса совершили разное число ошибок. Найдем минимальное число ошибок, которое могли сделать ученики: $1 + 2 + ... + 23 = 276$. Эта сумма совпала с общим числом ошибок в классе. Следовательно каждый ученик сделал от 1 ошибки до 23. Пусть в первую группу вошли $(23 - k)$ учеников, сделавших $k+1, k+2, ..., 23$ ошибок соответственно. Тогда во вторую группу вошли k учеников с $1, 2, ..., k$ ошибками для каждого при некотором k, $k \in [1; 22]$. Вычислим количество ошибок во второй группе:

$$S_2 = 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Тогда в первой группе количество ошибок равно

$$S_1 = 276 - S_2.$$

По условию задачи $|S_2 - S_1| = 4$: $|k^2 + k - 276| = 4$.

Случай 1. $k^2 + k - 276 = 4$. Получаем уравнение $k^2 + k - 280 = 0$. Это уравнение не имеет целочисленных решений.
Случай 2. $k^2 + k - 276 = -4$. Получаем уравнение $k^2 + k - 272 = 0$. Это уравнение имеет два решения $k_1 = 16, k_2 = -17$. Условию задачи удовлетворяет решение $k_1 = 16$. Следовательно число двоек в классе равно $23 - 16 = 7$.
Ответ: 7 двоек.

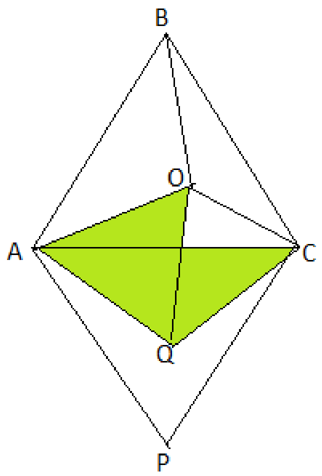
Задача 4. Пусть x это наименьшее из чисел a и b , а y – наибольшее число из пары чисел a и b. Заметим, что $x+y=a+b$, а $y-x=|a-b|$. С учетом равенства $|a-b|=\sqrt{(a-b)^2}$ эти условия можно переписать в виде:

$$x+y=a+b,\quad y-x=\sqrt{(a-b)^2}$$

Сложим первое и второе равенства: $2y=a+b+\sqrt{(a-b)^2}$. Тогда $y=\dfrac{a+b+\sqrt{(a-b)^2}}{2}$.

Ответ: наибольшее число в паре $(a;b)$ вычисляется по формуле $\frac{1}{2}\left(a+b+\sqrt{(a-b)^2}\right)$.

Задача 5. Совершим поворот по часовой стрелке треугольника ABC на 60^0 относительно вершины A. При таком повороте точка B перейдет в точку $C,$ точка C перейдет в точку $P,$ а точка O перейдет в точку $Q.$ Рассмотрим треугольник $OQC.$ Так как треугольник AOQ равносторонний ($AO=AQ,$ угол OAQ равен 60^0), то $OQ=AO.$ Так как точка O перешла в точку $Q,$ а точка B перешла в точку $C,$ то отрезок OB перешел в отрезок $QC.$ Следовательно $QC=OB.$ Мы доказали, что стороны треугольника OQC равны отрезкам OA, OB и $OC.$ Задача свелась к нахождению площади треугольника OQC. Нам надо найдем площадь этого треугольника. Рассмотрим четырехугольник $AOCQ$. Его площадь равна сумме площадей треугольников AOC и $ACQ.$ По условию задачи площадь AOC равна $5\sqrt{3}.$ Кроме того треугольник ACQ равен треугольнику ABO ($AC=AB,$ $QC=OB,$ $AQ=AO$). Следовательно площадь треугольников и ACQ равна $3\sqrt{3},$ а площадь четырехугольника $AOCQ$ равна $5\sqrt{3}+3\sqrt{3}=8\sqrt{3}.$ Для нахождения площади искомого треугольника OQC надо из площади четырехугольника $AOCQ$ вычесть площадь равностороннего треугольника AOQ со стороной $AO=2$ (эта площадь равна $\dfrac{AO^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$). В результате находим искомую площадь $8\sqrt{3}-\sqrt{3}=7\sqrt{3}.$



Ответ: $7\sqrt{3}.$

Вариант 2

1. Пункты A и B расположены на круговой трассе. Два приятеля выехали одновременно на велосипедах: Андрей из A в B , а Боря – из B в A навстречу друг другу. Они встретились,

когда часы показывали 12 часов, и каждый продолжил свое движение до конечного пункта. Андрей прибыл в пункт B спустя 1 час после встречи, а Боря прибыл в пункт A спустя 2 часа после начала движения. Сколько времени показывали часы, когда они отправились в путь?
Ответ: 11 часов.
2. Черепаха Тартилла прожила 314 лет. Буратино выбрал из них счастливые по принципу: разность любых двух счастливых лет должна быть составным числом. Какое максимальное число счастливых, по мнению Буратино, лет могла прожить черепаха?
Ответ: 79.
3. В 7^{б} классе 25 учеников. В понедельник все писали диктант, причем не нашлось двух учеников, сделавших в диктанте одинаковое количество ошибок, каждый сделал хотя бы одну ошибку, а общее число ошибок в классе оказалось равным 325. Учитель разделил класс на две группы. В первую попали те, кто сделал ошибок больше, чем любой ученик из второй группы и только им была выставлена за диктант двойка. Сколько двоек поставил учитель в классе, если число ошибок, допущенных учениками первой и второй групп, отличается по абсолютному значению на 17?
Ответ: 7 двоек.

4. У вас имеется компьютер, выполняющий с числами только пять операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Придумайте формулу, по которой компьютер мог определить наименьшее число в паре $(a;b)$ для любых чисел a и b .

Ответ: $\frac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{(a-b)^2}\right)$.
5. Точка O расположена внутри правильного треугольника ABC на расстоянии 4 от вершины A. Площади треугольников OAB и OAC равны $2\sqrt{3}$ и $7\sqrt{3}$ соответственно. Найти площадь треугольника со сторонами равными отрезкам OA, OB и OC .

Ответ: $5\sqrt{3}$.

Вариант 3

1. Пункты A и B расположены на круговой трассе. Два приятеля выехали одновременно на велосипедах: Андрей из A в B , а Боря – из B в A навстречу друг другу. Они встретились, когда часы показывали 11 часов, и каждый продолжил свое движение до конечного пункта. Андрей прибыл в пункт B спустя 1 час после встречи, а Боря прибыл в пункт A спустя 12 часов после начала движения. Сколько времени показывали часы, когда они отправились в путь?
Ответ: 8 часов.
2. Черепаха Тартилла прожила 289 лет. Буратино выбрал из них счастливые по принципу: разность любых двух счастливых лет должна быть составным числом. Какое максимальное число счастливых, по мнению Буратино, лет могла прожить черепаха?
Ответ: 73.
3. В 7^{в} классе 27 учеников. В понедельник все писали диктант, причем не нашлось двух учеников, сделавших в диктанте одинаковое количество ошибок, каждый сделал хотя бы одну ошибку, а общее число ошибок в классе оказалось равным 378. Учитель разделил класс на две группы. В первую попали те, кто сделал ошибок больше, чем любой ученик из второй группы и только им была выставлена за диктант двойка. Сколько двоек поставил учитель в классе, если число ошибок, допущенных учениками первой и второй групп, отличается по абсолютному значению на 2?
Ответ: 8 двоек.

4. У вас имеется компьютер, выполняющий с числами только пять операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Придумайте формулу, по которой компьютер мог определить наибольшее число в паре $(|a|;|b|)$ для любых чисел a и b.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2}\right)$.

5. Точка O расположена внутри правильного треугольника ABC на расстоянии 6 от вершины A. Площади треугольников OAB и OAC равны $5\sqrt{3}$ и $8\sqrt{3}$ соответственно. Найти площадь треугольника со сторонами равными отрезкам OA, OB и OC.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Вариант 4

1. Пункты A и B расположены на круговой трассе. Два приятеля выехали одновременно на велосипедах: Андрей из A в B, а Боря – из B в A навстречу друг другу. Они встретились, когда часы показывали 14 часов, и каждый продолжил свое движение до конечного пункта. Андрей прибыл в пункт B спустя 2 часа после встречи, а Боря прибыл в пункт A спустя 4 часа после начала движения. Сколько времени показывали часы, когда они отправились в путь?

Ответ: 12 часов.

2. Черепаха Тартилла прожила 257 лет. Буратино выбрал из них счастливые по принципу: разность любых двух счастливых лет должна быть составным числом. Какое максимальное число счастливых, по мнению Буратино, лет могла прожить черепаха?

Ответ: 65.

3. В 7^{г} классе 20 учеников. В понедельник все писали диктант, причем не нашлось двух учеников, сделавших в диктанте одинаковое количество ошибок, каждый сделал хотя бы одну ошибку, а общее число ошибок в классе оказалось равным 210. Учитель разделил класс на две группы. В первую попали те, кто сделал ошибок больше, чем любой ученик из второй группы и только им была выставлена за диктант двойка. Сколько двоек поставил учитель в классе, если число ошибок, допущенных учениками первой и второй групп равны?

Ответ: 6 двоек.

4. У вас имеется компьютер, выполняющий с числами только пять операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Придумайте формулу, по которой компьютер мог определить наименьшее число в паре $(|a|;|b|)$ для любых чисел a и b.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2}\right)$.

5. Точка O расположена внутри правильного треугольника ABC на расстоянии 8 от вершины A. Площади треугольников OAB и OAC равны $7\sqrt{3}$ и $12\sqrt{3}$ соответственно. Найти площадь треугольника со сторонами равными отрезкам OA, OB и OC.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Росатом 8 класс (Отборочный тур), Москва 17.11.2024

Во всех задачах ответ без решения – 0

Задача 1:

0 – Неверно составлены уравнения по условию;

1 – Верно составлена математическая модель (система уравнений или уравнения подобия);

2 – Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения;

3 – Задача решена верно. Второй случай можно не рассматривать. Просто зеркальное отражение.

Задача 2:

0 – Продвижение в решении несущественно;

1 – Заметил, что самое маленькое составное число равно 4 и пытается разделить числа на группы;

2 – Верное завершенное решение с небольшой арифметической ошибкой или отсутствует подтверждающий пример;

3 - Задача решена верно с подтверждающим примером.

Задача 3:

0 – Сделаны несущественные предположения по решению задачи;

1 – Заметил, что число ошибок принимает все натуральные значения от 1 до значения количества учеников, обосновал разделение учеников на группы и составил уравнение, из которого можно найти число учеников в одной из групп;

2 – Недостаточное обоснование окончательного ответа или арифметическая ошибка;

3 - Задача решена верно.

Задача 4:

0 – Сделаны безуспешные попытки поиска решения;

1 – Попытался с помощью разрешенных операций получить модуль;

2 – Получен ответ, в котором не все действия доведены до 5 элементарных разрешенных (например, квадрат вместо умножения) или забыто последнее умножение на 1\2 (деление на 2);

3 - Задача решена верно, все действия доведены до 5 элементарных разрешенных.

Задача 5:

0 – Нарисован плохой чертёж;

1 – Нарисован подробный грамотный чертеж и предприняты попытки что-то достроить, дальнейших продвижений в решении нет;

2 – Задача решена с недостаточным обоснованием или мелкой арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения;

3 – Задача решена верно.