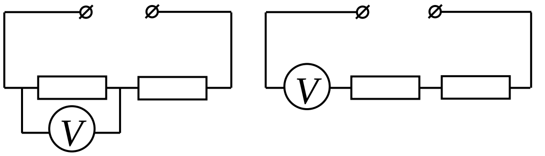
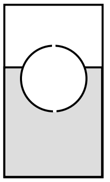
Решения
Отборочный тур олимпиады «Росатом», 2022-2023 учебный год,
физика, 10 класс



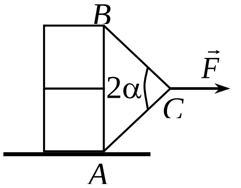
1. Электрическая цепь, схема которой показана на левом рисунке, состоит из двух одинаковых резисторов и вольтметра и подключена к источнику постоянного напряжения. Когда вольтметр включают последовательно с резисторами (правый рисунок), его показания увеличиваются в 3/2 раза. Найти отношение сопротивления резистора к сопротивлению вольтметра.

2. Два тела имеют температуры $t°C$. Если первое нагреть до температуры $5t°C$ и привести в тепловой контакт со вторым, установится температура $4t°C$. Какая установится температура, если до температуры $5t°C$ нагреть второе тело и привести его в контакт с первым телом с температурой $t°C$?

3. Два тела движутся с одинаковыми скоростями вдоль одной прямой, находясь на некотором расстоянии друг от друга. Тела одновременно начинают ускоряться: переднее - с постоянным ускорением a_1, заднее – с постоянным ускорением a_2 ($a_2 > a_1$). В момент встречи тел их скорости равны v и $2v$. Найти скорость тел и расстояние между ними до начала ускорения.



4. Тонкостенный шар радиуса R, имеющий малые отверстия внизу и вверху, плавает в высоком цилиндрическом сосуде с водой радиуса $2R$, погрузившись в воду на две трети своего объема, при этом воды в шаре нет. Вода начинает медленно поступать в шар через нижнее отверстие, вытесняя воздух через верхнее. Каким будет уровень воды в сосуде, когда (а) шар заполнится водой наполовину, (б) полностью заполнится водой?



5. Друг на друга поставили два одинаковых кубика массой M (см. рисунок). Затем нижний кубик жестко закрепили на поверхности, а к серединам ребер кубиков в точках A и B прикрепили невесомую нить, за середину которой тянут с медленно возрастающей силой F. При каких значениях коэффициента трения μ между кубиками верхний кубик начнет скользить, а при каких опрокинется? Угол ACB равен 2α.

Решения

1. Пусть сопротивление резистора равно r, сопротивление вольтметра - R. Тогда ток в цепи в первом случае будет равен

$$I_1 = \frac{U}{r + \dfrac{rR}{r+R}} = \frac{U\left(r+R\right)}{2rR + r^2},$$

и, следовательно, показания вольтметра будут равны

$$U_{V,1} = I_1 \frac{rR}{r+R} = \frac{UrR}{2Rr + r^2}.$$

Во втором случае ток в цепи и показания вольтметра определяются соотношениями

$$I_2 = \frac{U}{2r+R},\ U_{V,2} = I_2 R = \frac{UR}{2r+R}$$

Поэтому

$$\frac{U_{V,2}}{U_{V,1}} = \frac{3}{2} = \frac{2rR + r^2}{rR + 2r^2}$$

Отсюда

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильное использование правил последовательного и параллельного соединения проводников – 0,5 балла
2. Получена правильная формула для показаний вольтметра в первом случае через параметры цепи (сопротивления вольтметра и резисторов, а также напряжения источника) – 0,5 балла
3. Получена правильная формула для показаний вольтметра во втором случае через параметры цепи (сопротивления вольтметра и резисторов, а также напряжения источника) – 0,5 балла
4. Правильный ответ для отношения сопротивления резистора и вольтметра – 0,5 балла
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Пусть теплоемкость первого тела равна C_1, второго C_2. Тогда уравнение теплового баланса для приведения тел в тепловой контакт после нагрева первого тела дает

$$C_1\left(5t - 4t\right) + C_2\left(t - 4t\right) = 0$$

Отсюда находим соотношение теплоемкостей тел

$$C_1 = 3C_2 \qquad (*)$$

Теперь рассмотрим уравнение теплового баланса для нагревания второго тела. Имеем

$$C_1\left(t - t_x\right) + C_2\left(5t - t_x\right) = 0$$

где t_x - установившаяся температура. Отсюда, используя (*) находим

$$t_x = 2t$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное уравнение теплового баланса в первом случае – 0,5 балла

2. Правильно найдено отношение теплоемкостей тел – 0,5 балла
3. Правильное уравнение теплового баланса во втором случае – 0,5 балла
4. Правильный ответ для установившейся температуры во втором случае – 0,5 балла
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Пусть скорость тел в тот момент, когда они начали ускоряться, равнялась v_0, а время, прошедшее после этого момента, то того, как одно тело догнало другое, - t. Тогда законы движения для скоростей тел дадут

$$v = v_0 + a_1 t$$
$$2v = v_0 + a_2 t$$

(здесь учтено, что большей будет скорость заднего тела, имеющего большее ускорение). Из этой системы уравнений находим

$$v_0 = \frac{(a_2 - 2a_1)v}{a_2 - a_1},\ t = \frac{v}{a_2 - a_1}$$

В связи с первой формулой отметим, что поскольку скорости тел в момент встречи отличаются вдвое, то $a_2 > 2a_1$ (в противном случае скорости тел в один и тот же момент времени не могли бы отличаться в 2 раза). Теперь, используя найденное время встречи, легко найти первоначальное расстояние между телами

$$l = \frac{(a_2 - a_1)t^2}{2} = \frac{v^2}{2(a_2 - a_1)}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные уравнения равноускоренного движения – 0,5 балла
2. Правильное условие встречи тел – 0,5 балла
3. Правильно найдено время встречи – 0,5 балла
4. Правильный ответ для первоначального расстояния между телами – 0,5 балла
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Пусть масса шара m. Тогда условия плавания шара дают

$$mg = \rho g 2V/3$$

где ρ - плотность воды, V - объем шара (по условию – объем погруженной в воду части пустого шара равен двум третьим частям его объема).

Пусть какая-то часть объема шара V_1 заполнится водой, но шар еще плавает. Тогда его масса увеличится на величину ρV_1, и на такую же величину должна увеличиться сила Архимеда

$$(m + \rho V_1)g = \rho g(2V/3 + \Delta V)$$

где ΔV - увеличение объема погруженной в воду части шара. Отсюда видим, что

$$\Delta V = V_1$$

Другими словами, объем вошедшей в шар воды в точности равен увеличению объема погруженной в воду части шара, а объем погруженной в воду и не заполненной водой части шара равен двум третьим частям его объема. Отсюда следует, что

(1) пока шар плавает, уровень воды в сосуде не меняется

(2) шар утонет, когда водой заполнится более одной трети его объема

(3) объем воды в сосуде плюс объем погруженной в воду части шара (т.е. тот объем, который определяет уровень воды в сосуде) уменьшается на объем воды, вошедшей в шар, после того, как он утонул.

Поэтому при заполнении половины шара водой, объем воды в сосуде плюс объем погруженной в воду части шара уменьшится на величину

$$\frac{1}{2}V-\frac{1}{3}V=\frac{1}{6}\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{2\pi}{9}R^3$$

Это приведет к понижению уровня воды в сосуде на величину Δh, которая определяется из уравнения

$$\pi 4R^2\Delta h=\frac{2\pi}{9}R^3 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h=\frac{1}{18}R$$

Аналогично найдем, что когда шар будет полностью заполнен водой, уровень воды в сосуде понизится на следующую величину Δh_1

$$\Delta h_1=\frac{2}{9}R$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильный (и обоснованный) вывод, что пока шар плавает, уровень воды в сосуде не меняется – 0,5 балла
2. Правильно найден объем незаполненной водой части шара в тот момент, когда шар утонул – 0,5 балла
3. Правильный вывод, что когда водой будет заполняться пустой объем утонувшего шара уровень воды в сосуде будет опускаться – 0,5 балла
4. Правильный ответ для величины понижения уровня воды в сосуде – 0,5 балла
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Очевидно, сила натяжения нити равна

$$T=\frac{F}{2\cos\alpha}$$

Чтобы верхний кубик опрокинулся, момент силы натяжения относительно правого-нижнего ребра верхнего кубика должен быть больше момента силы тяжести. А поскольку сила тяжести приложена к центру тяжести (геометрическому центру) верхнего кубика, это условие дает

$$Ta\cos\alpha \geq Mg\frac{a}{2}$$

(a - ребро кубика). Отсюда и предыдущей формулы находим условие опрокидывания кубика

$$F\geq Mg \qquad (*)$$

Найдем теперь условие скольжения верхнего кубика. Для этого сдвигающая сила $T\cos\alpha$ должна быть больше максимальной силы трения покоя μN, где N - сила реакции, действующая между кубиками. Поскольку

$$N = Mg + T\sin\alpha = Mg + \frac{F\sin\alpha}{2\cos\alpha}$$

условие скольжения имеет вид

$$F \geq \frac{2\mu Mg}{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha} \qquad (**)$$

Кубик начнет скользить, если раньше с ростом F начнет выполняться неравенство (**), чем неравенство (*). Поэтому условием опрокидывания является неравенство

$$\frac{2\mu Mg}{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha} \geq Mg \text{ или } \frac{2\mu}{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha} \geq 1 \qquad (***)$$

Решим это неравенство относительно μ. Отметим, что знаменатель левой части неравенства положителен, поскольку в противном случае неравенство не выполнено. Поэтому из (***) имеем

$$2\mu \geq 1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

или

$$\mu \geq \frac{1}{2+\mathrm{tg}\,\alpha}$$

При выполнении этого неравенство верхний кубик опрокинется, в обратном случае будет скользить.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное условие опрокидывания верхнего кубика – 0,5 балла
2. Правильное условие скольжения верхнего кубика – 0,5 балла
3. Правильное неравенство опрокидывания верхнего кубика – 0,5 балла
4. Правильный ответ для коэффициента трения, при котором верхний кубик опрокинется – 0,5 балла
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.

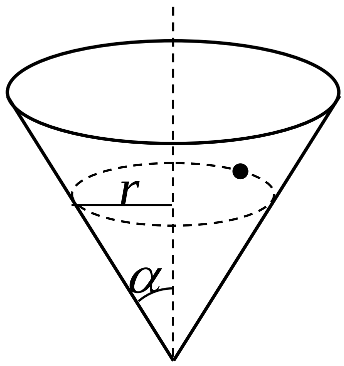
Задания, решения и критерии оценки работ очного отборочного тура Отраслевой физико-математической олимпиады школьников Росатом и Инженерной олимпиады школьников

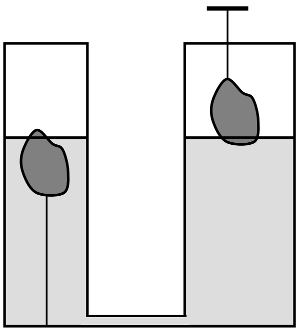
10 класс, 2022-2023 учебный год

1 вариант

1. При закалке стальных деталей проводится следующая процедура. Имеются три одинаковых сосуда с маслом при одной и той же температуре. Горячую деталь опускают в первый сосуд, и после установления теплового равновесия температура масла в нем повышается на $\Delta t_1 = 60°C$. После этого деталь переносят во второй сосуд, и после установления теплового равновесия температура масла в нем повышается на $\Delta t_2 = 5°C$. После этого деталь переносят в третий сосуд. Насколько повысится температура масла в нем, когда наступит тепловое равновесие? Какой была первоначальная температура детали, если комнатная температура составляет $t_0 = 20°C$? Сосуды теплоизолированы.

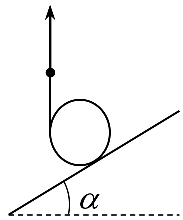
2. Небольшое тело движется по внутренней поверхности вертикального конуса, описывая горизонтальную окружность радиуса r с центром на оси конуса (см. рисунок). Найти угловую скорость тела, если угол между осью конуса и его образующей равен α. Поверхность конуса гладкая, влиянием силы сопротивления воздуха пренебречь.



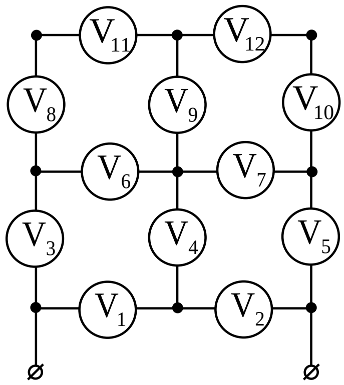


3. Имеются два цилиндрических сообщающихся сосуда с площадью S и $2S$. В сосудах находятся две одинаковые льдинки, которые привязаны невесомыми нитями ко дну сосуда в меньшем сосуде и к потолку в большем (см. рисунок). Известно, что силы натяжения нитей одинаковы и равны $T = 1$ Н. Льдинки тают. Изменится ли уровень воды в сосудах, и если да, то насколько? Будет ли течь вода по трубке, соединяющей сосуды, в процессе таяния льдинок, и если да, то каков объем протекшей воды? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho = 900$ кг/м^3, $S = 30$ см^2. $g = 10$ м/с^2.

4. Тело в виде прямоугольного параллелепипеда с размерами сторон $a \times b \times c = 10\,(\text{см}) \times 5\,(\text{см}) \times 3\,(\text{см})$ положили в цилиндрический сосуд с водой. Если тело положить на сторону с самой большой площадью, высота уровня воды в сосуде составляет $h_1 = 4\,(\text{см})$. Если тело положить на сторону со средней площадью, высота уровня воды в сосуде составляет $h_2 = 3\,(\text{см})$. Найти объем воды в сосуде. Какой будет высота уровня воды в сосуде, если тело положить на дно сосуда на сторону с самой маленькой площадью?



5. На массивную трубу намотали нить. Затем трубу положили на шероховатую наклонную плоскость с углом наклона α так, что ось трубы параллельна основанию плоскости. Трубу удерживают в покое, прикладывая к концу нити силу, направленную вертикально вверх (см. рисунок). При каком коэффициенте трения между трубой и плоскостью возможно такое равновесие?



6. Электрическая цепь, схема которой показана на рисунке, состоит из 12 одинаковых вольтметров. К цепи приложили некоторое напряжение (см. рисунок). Известно, что сумма показаний всех двенадцати вольтметров равна $U_0 = 24$ В. Найти показания всех вольтметров.

Решения и критерии оценивания

1. Пусть теплоемкость сосуда с маслом равна C_0, теплоемкость детали C, начальная температура детали t_1. Тогда поскольку установившаяся температура сосуда после установления теплового равновесия равна $t_0+\Delta t_1$, уравнение теплового баланса теплообмена для опускания детали в первый сосуд с маслом дает

$$C_0\Delta t_1 = C\left(t-t_0-\Delta t_1\right)$$

Отсюда находим

$$\Delta t_1 = \frac{C\left(t-t_0\right)}{C+C_0} \qquad (1)$$

Отсюда легко получить соотношение для нагревания второго сосуда при опускании в него детали из первого сосуда. Действительно, поскольку $t-t_0$ в числителе формулы (1) – это разность температуры детали и масла, при опускании детали из первого сосуда во второй эта разность составляет Δt_1, а теплоемкости не изменились, для величины Δt_2 имеем

$$\Delta t_2 = \frac{C\Delta t_1}{C+C_0} \qquad (2)$$

И аналогично для опускания детали из второго сосуда в третий

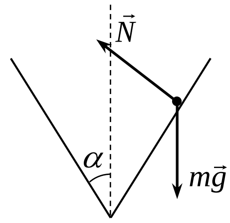
$$\Delta t_3 = \frac{C\Delta t_2}{C+C_0} \qquad (3)$$

Выражая из формулы (2) отношение $C/(C+C_0)$ и подставляя его в формулу (3) и (1), найдем, насколько повысится температура третьего сосуда и первоначальную температуру детали

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta t_2^2}{\Delta t_1} = 0,42°C\ ,\ t = t_0 + \frac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2} = 720°C$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. использование формулы $Q = C\Delta t$ для отданного или полученного телом тепла - 0,5 балла
2. уравнение теплового баланса для опускания первой детали – 0,5 балла
3. изменение температуры детали через первоначальную разность температур детали и масла – 0,5 балла
4. правильный ответ – формула и число – 0,5 балла

2. Поскольку поверхность конуса гладкая, и тело движется на одной и той же высоте, его скорость не меняется. На тело действуют – сила реакции опоры, и сила тяжести. И выполнен закон вращательного движения – сумма этих сил в каждой точке направлена к центру окружности, по которой движется тело, и равна $m\omega^2 r$, где m - масса тела, ω - угловая скорость. Поэтому проекции второго закона Ньютона на вертикальную ось и ось, направленную к центру окружности, по которой движется тело, дает



$$0 = N\sin\alpha - mg$$

$$m\omega^2 r = N\cos\alpha$$

Отсюда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{ctg}\alpha}{r}}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильное уравнение второго закона Ньютона для вращательного движения – 0,5 балла.
2. правильные силы – 0,5 балла.
3. правильные проекции векторных уравнений на вертикальную и горизонтальную оси – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла.

3. Найдем объем погруженных частей в воду частей льдинок и объем воды, который получится при их таянии. Если эти два объема равны друг другу, уровень воды в сосудах не изменится; если объем получившейся при таянии воды больше объема погруженных частей, уровень воды повысится; если меньше – понизится. Объемы погруженных частей льдинок можно найти из условия их равновесия. Для льдинки в малом сосуде

$$mg + T = \rho_0 g V_{п.ч.}^{(1)} \tag{4}$$

где m - масса льдинки, $V_{п.ч.}^{(1)}$ - объем погруженной в воду части льдинки в малом сосуде. Для льдинки в большом сосуде

$$mg = T + \rho_0 g V_{п.ч.}^{(2)} \tag{5}$$

Складывая формулы (4) и (5) найдем суммарный объем погруженных в воду частей льдинок

$$V_{п.ч.}^{(1)} + V_{п.ч.}^{(2)} = \frac{2m}{\rho_0} \tag{6}$$

С другой стороны при таянии двух льдинок массы m каждая получится объем воды величиной

$$V_{воды} = \frac{2m}{\rho_0} \tag{7}$$

Из сравнения (6) и (7) видим, что уровень воды в сосудах не изменится.

А вот перетекать вода из одного сосуда в другой будет, поскольку объем воды, получившейся при таянии льдинки в каждом сосуде не будет равен объему погруженной в воду части льдинки в этом сосуде. Из формулы (4) для малого сосуда находим

$$V_{п.ч.}^{(1)} - V_{воды}^{(1)} = \frac{T}{\rho_0 g}$$

где $V_{воды}^{(1)}$ - объем воды, получившейся при таянии льдинки в малом сосуде. Поскольку $V_{п.ч.}^{(1)} - V_{воды}^{(1)} > 0$, а уровень воды в сосудах не изменится, воды, получившейся при таянии льдинки в малом сосуде, не хватит, чтобы «заполнить» погруженную часть льдинки. Следовательно, этот объем воды перетечет в малый сосуд из большого. Сравнение объема погруженной в воду части льдинки в большом сосуде и объема, полученного при таянии льдинки в большом сосуде, приводит к тому же выводу.

Таким образом, при таянии льдинок уровень воды в сосудах не изменится, из большого сосуда в малый перетечет объем воды

$$V = \frac{T}{\rho_0 g} = 100 \text{ см}^3.$$

От площади сечений сосудов результаты не зависят.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. правильная идея решения – нахождения объема воды, полученного при таянии льда, и его сравнение с объемом вытесненной воды - 0,5 балла
2. правильные условия равновесия для льдинок в одном и втором сосуде – 0,5 балла
3. правильный (и обоснованный) вывод о неизменности уровня воды в сосудах – 0,5 балла
4. правильный ответ для объема протекшей по трубке воды – 0,5 балла

4. Очевидно, что в первом случае брусок весь находится под водой, во втором и в третьем под водой находится только часть бруска. Поэтому если объем воды в сосуде равен V, а площадь дна сосуда S, то условие баланса объемов дает

$$Sh_1 = V + a \cdot b \cdot c$$

где $a \cdot b \cdot c$ - объем бруска. Поскольку во втором случае под водой находится часть объема бруска величиной $a \cdot c \cdot h_2$, то условие баланса объемов имеет вид

$$Sh_2 = V + a \cdot c \cdot h_2$$

И аналогично в третьем случае

$$Sh_3 = V + b \cdot c \cdot h_3$$

из первых двух уравнений находим объем воды в сосуде и площадь дна сосуда

$$V = \frac{ach_2(b - h_1)}{(h_1 - h_2)} = 90 \text{ см}^3, \; S = \frac{ac(b - h_2)}{(h_1 - h_2)} = 60 \text{ см}^2$$

Подставляя теперь эти выражения в формулу для третьего случая, получим

$$h_3 = \frac{ah_2\left(b - h_1\right)}{a\left(b - h_2\right) - b\left(h_1 - h_2\right)} = 2 \text{ см}$$

В результате ответы в первом варианте

$$V = \frac{ach_2(b - h_1)}{(h_1 - h_2)} = 90 \text{ см}^3, \; h_3 = \frac{ah_2\left(b - h_1\right)}{a\left(b - h_2\right) - b\left(h_1 - h_2\right)} = 2 \text{ см}$$

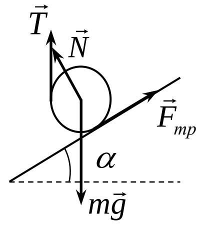
Ответы во втором варианте

$$S = \frac{ac(b - h_2)}{(h_1 - h_2)} = 60 \text{ см}^2, \; h_3 = \frac{ah_2\left(b - h_1\right)}{a\left(b - h_2\right) - b\left(h_1 - h_2\right)} = 2 \text{ см}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. вывод, что в первом случае весь брусок находится под водой, во втором и третьем – часть бруска под, часть над водой - 0,5 балла
2. правильные уравнения для баланса объемов для первого, второго и третьего случаев - 0,5 балла
3. правильное нахождение объема воды в сосуде и площади дна сосуда – 0,5 балла
4. правильный ответ (формула и число) – 0,5 балла

5. На трубу действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции плоскости $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная вверх вдоль плоскости (см. рисунок). Чтобы труба находилась в равновесии сумма сил и сумма моментов сил, действующих на трубу, должна равняться нулю. Условие моментов относительно центра трубы дает



$$TR = F_{тр}R$$

где T - сила натяжения каната, $F_{тр}$ - сила трения, действующая на трубу со стороны плоскости. Откуда находим, что

$$T = F_{тр}$$

С другой стороны, из условия моментов относительно точки касания трубы и плоскости имеем

$$T\left(R + R\sin\alpha\right) = mgR\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

Поэтому

$$F_{тр} = \frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

и условие покоя трубы имеет вид

$$F_{тр} \le F_{тр}^{\max} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \le \mu N$$

Находя силу реакции плоскости из уравнения сил

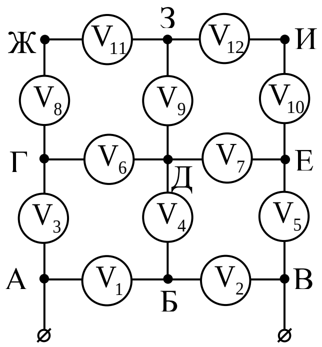
$$N = mg\cos\alpha - T\cos\alpha = mg\cos\alpha - \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{mg\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$

получим условие покоя трубы

$$\frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \le \frac{\mu mg\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \ge \operatorname{tg}\alpha$$

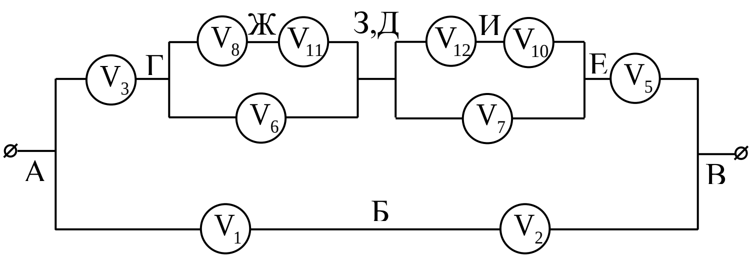
Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. правильно расставлены силы, действующие на трубу - 0,5 балла
2. правильные условия равновесия трубы – 0,5 балла
3. правильное условие начала сдвига трубы – достижение силой трения максимального значения – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла

6. Пусть к цепи приложено напряжение U. Тогда электрическое напряжение между точками Б, Д и З (см. первый рисунок в решении) равно нулю. Следовательно, показания вольтметров V_4 и V_9 - нулевые



$$U_4 = U_9 = 0,$$

и эти вольтметры можно удалить из цепи без изменения токов в каких-либо ее участках. Поэтому данная цепь эквивалентна цепи, показанной на втором рисунке, из которого видно, что напряжение делится пополам на правую и левую половины цепи, и, следовательно, показания вольтметров V_1 и V_2 равны



$$U_1 = U_2 = \frac{1}{2}U$$

Далее. Напряжение на участке А – З,Д равно $U/2$, сопротивление участка Г-З,Д составляет

$$r_{Г-З,Д} = \frac{2r}{3}$$

где r - сопротивление вольтметра, это напряжение делится между участками А-Г и Г-З,Д в пропорции 1:(2/3). Поэтому напряжение на вольтметре V_3 (участок А-Г) равно 3/5 от $U/2$, а на вольтметрах V_6, V_8 и V_{11} составляет 2/5 от $U/2$. Поэтому

$$U_3 = \frac{3}{10}U, \; U_6 = \frac{2}{10}U, \; U_8 = U_{11} = \frac{1}{10}U$$

Аналогично,

$$U_5 = \frac{3}{10}U, \; U_7 = \frac{2}{10}U, \; U_{10} = U_{12} = \frac{1}{10}U$$

В результате условие равенства величине U_0 суммы напряжений на вольтметрах дает

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11} + U_{12} = U_0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{24}{10}U = U_0$$

Отсюда находим напряжение, приложенное к цепи

$$U = \frac{10}{24}U_0,$$

а из приведенных выше формул показания каждого вольтметра

$$U_1 = U_2 = \frac{5}{24}U_0 = 5 \text{ В}$$

$$U_3 = U_5 = \frac{3}{24}U_0 = 3 \text{ В}$$

$$U_4 = U_9 = 0$$

$$U_6 = U_7 = \frac{2}{24}U_0 = 2 \text{ В}$$

$$U_8 = U_{10} = U_{11} = U_{12} = \frac{1}{24}U_0 = 1 \text{ В}.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. выбрасывание (с доказательством) четвертого и девятого вольтметра - 0,5 балла.
2. правильная эквивалентная цепь, сводящаяся к последовательному и параллельному соединению резисторов – 0,5 балла.
3. правильный расчет напряжений на участках этой цепи – 0,5 балла
4. правильный ответ для напряжения на всех вольтметрах – 0,5 балла.

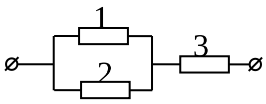
Оценка работы
Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.
2 вариант (критерии оценки задач такие же как в варианте 1)

1. $\Delta t_3 = \dfrac{\Delta t_2^2}{\Delta t_1} = 0,36°C$, $t = t_0 + \dfrac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2} = 1000°C$ **2.** та же задача, что и в варианте 1. **3.** при таянии льдинок уровень воды в сосудах не изменится, из большого сосуда в малый перетечет объем воды $V = \dfrac{T}{\rho_0 g} = 100$ см^3. От площади сечений сосудов результаты не зависят. **4.** $S = \dfrac{ac(b-h_2)}{(h_1-h_2)} = 60$ см^2, $h_3 = \dfrac{ah_2\left(b-h_1\right)}{a\left(b-h_2\right)-b\left(h_1-h_2\right)} = 2$ см. **5.** $\mu \geq \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = tg\left(\alpha/2\right)$, **6.** все формулы такие же, как в первом варианте, значения вдвое больше, чем в первом варианте

Задания, решения и критерии оценки работ очного отборочного тура Отраслевой физико-математической олимпиады школьников Росатом и Инженерной олимпиады школьников
10 класс, 2022-2023 учебный год (отборочный тур, 2)

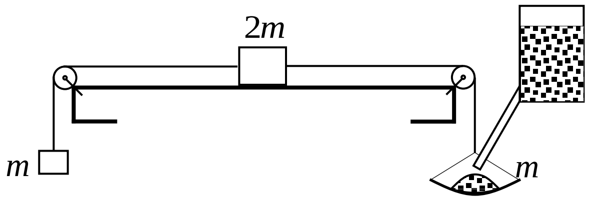
1 вариант

1. Имеются три резистора 1, 2 и 3, на которых выделяются мощности P, $2P$ и $3P$ соответственно, при подключении к каждому из них некоторого электрического напряжения. Резисторы соединяют в цепь, схема которой показана на рисунке, и подключают это напряжение ко всей цепи. Какая мощность выделяется на всей цепи?



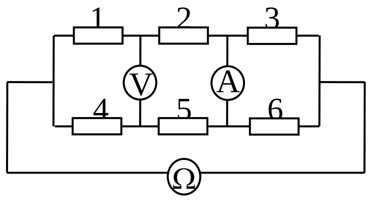
2. В сосуде находится смесь одинаковых масс азота N_2 и гелия He под давлением $p = 10^6$ Па. Абсолютную температуру газа увеличивают вдвое, при этом 2/3 молекул азота диссоциируют (распадаются) на атомы. Найти давление смеси газов при этой температуре. Молярные массы газов равны $\mu_{He} = 4$ г/моль, $\mu_{N_2} = 28$ г/моль. Газы считать идеальными.

3. Два тела с массами m и $2m$ связали невесомой и нерастяжимой нитью. Нить перекинули через блок, укрепленный на краю стола. Затем к телу массой $2m$ прикрепили еще одну нить, которую перебросили через блок, укрепленный на противоположном краю стола, а к ней привязали чашку массой m (см. рисунок). Затем в эту чашку насыпали тонкой струйкой песок из бункера. Найти ускорение тел, если масса песка в чашке вдвое превосходит ту минимальную массу песка, при которой тела сдвинутся с места. Коэффициент трения между телом $2m$ и поверхностью μ.

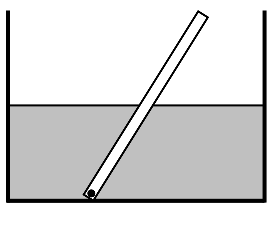


4. К концам невесомого стержня длиной l, который может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, делящий стержень на два части длиной $l/4$ и $3l/4$, прикреплены точечные тела массой $2m$ и m (см. рисунок). Вначале стержень удерживают горизонтально, а в некоторый момент времени отпускают. Найти ускорения тел сразу после этого.

5. Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, содержит шесть резисторов: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, $R_5 = 2$ Ом, $R_6 = 1$ Ом, идеальные амперметр и вольтметр, а также омметр. Найти показания приборов. Ответ обосновать. **Указание:** омметр – прибор для измерения сопротивлений - представляет собой последовательно соединенные источник напряжения, амперметр и резистор. Омметр измеряет силу электрического тока в цепи и пересчитывает ее и напряжение источника в сопротивление внешней цепи.



6. На дно узкой пробирки длиной l и площадью поперечного сечения S положили массивное точечное тело и опустили пробирку в неглубокий сосуд с водой. В результате дно пробирки легло на дно сосуда, ее половина оказалась в воде, половина – над водой (см. рисунок). Найти массу пустой пробирки. Плотность воды ρ.



Решения и критерии оценивания

1. Пусть напряжение, которое подключали к резисторам, равно U. Тогда сопротивления резисторов равны

$$R_1 = \frac{U^2}{P} = R\,,\; R_2 = \frac{U^2}{2P} = \frac{R}{2}\,,\; R_3 = \frac{U^2}{3P} = \frac{R}{3}$$

Сопротивление всей цепи r находим по правилам сложения последовательно и параллельно соединенных резисторов:

$$r = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{2R}{3}$$

Поэтому мощность, которая выделяется на всей цепи, равна

$$P' = \frac{U^2}{r} = \frac{U^2 3}{2R} = \frac{3}{2}P$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Правильный закон Джоуля-Ленца - 0,5 балла
2. Правильно найдены сопротивления всех резисторов – 0,5 балла
3. Правильно найдено сопротивление всей цепи – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

2. Пусть массы гелия и азота в сосуде равны m. Тогда для давления p первоначальной смеси гелия и азота в сосуде имеем

$$pV = m\left(\frac{1}{\mu_{He}} + \frac{1}{\mu_{N_2}}\right)RT$$

где V - объем сосуда, T - температура смеси в начальном состоянии.

При двукратном увеличении температуры 2/3 молекул азота диссоциирует; их молярная масса становится равной $\mu_{N_2}/2$. Поэтому количество вещества азота в сосуде можно найти следующим образом

$$\frac{(2m/3)}{(\mu_{N_2}/2)} + \frac{(m/3)}{\mu_{N_2}} = \frac{5m}{3\mu_{N_2}}$$

В результате для давления p_1 смеси газов в том же сосуде при удвоенной абсолютной температуре имеем

$$p_1 V = m\left(\frac{1}{\mu_{He}} + \frac{5}{3\mu_{N_2}}\right)R2T$$

Деля первое и последнее уравнения друг на друга, получим

$$p_1 = \frac{2\left(3\mu_{N_2} + 5\mu_{He}\right)}{3\left(\mu_{N_2} + \mu_{He}\right)}\,p = 2{,}2\cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильный закон Дальтона для давления смеси газов в начальном состоянии – 0,5 балла.

2. Правильно найдено количество вещества смеси газов после диссоциации 2/3 молекул азота – 0,5 балла.
3. Правильный закон Дальтона для давления смеси газов в конечном состоянии – 0,5 балла
4. Правильный ответ (формула и число) – 0,5 балла.

3. Найдем сначала минимальную массу песка, при которой тела сдвинутся с места. Поскольку массы чашки и подвешенного с другой стороны тела одинаковы, то для того чтобы верхнее тело сдвинулось с места сила тяжести песка должна быть равна максимальной силе трения покоя, действующей на верхнее тело. Т.е. минимальная масса песка, сдвигающая тела равна

$$m_1 g = \mu 2mg \qquad \Rightarrow \qquad m_1 = 2\mu m$$

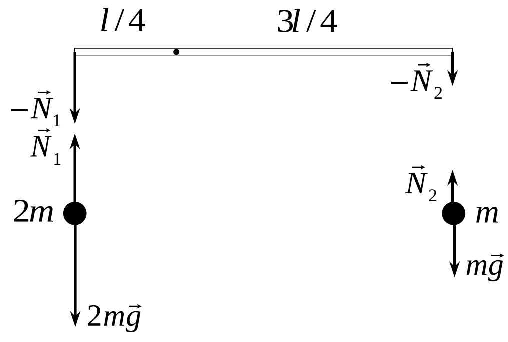
Рассмотрим теперь случай, когда масса песка в чашке равна $m_2 = 4\mu m$. Тогда уравнения движения тел в проекции на направление их движения имеют вид

$$\begin{aligned} &ma = T_1 - mg \\ &2ma = T_2 - T_1 - 2\mu mg \\ &(m + 4\mu m)a = (m + 4\mu m)g - T_2 \end{aligned}$$

где a - ускорение тел, T_1 и T_2 - соответственно силы натяжения левой и правой нитей в этом случае. Складывая эти уравнения, найдем

$$a = \frac{\mu g}{2(1+\mu)}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильная масса песка, при которой тела сдвинутся с места - 0,5 балла.
2. правильный второй закон Ньютона (с условиями связи) для удвоенной массы песка – 0,5 балла.
3. правильная система уравнений для ускорения тел – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла.



4. Поскольку стержень невесом, сумма сил и сумма моментов всех сил, действующих на стержень должна равняться нулю. В частности, для моментов сил, действующих на стержень со стороны тел, имеем (см. рисунок)

$$\frac{l}{4}N_1 = \frac{3l}{4}N_2 \qquad \Rightarrow \qquad N_1 = 3N_2 \qquad (*)$$

Поэтому второй закон Ньютона для тел дает (в проекциях на вертикальную ось, направленную вертикально вниз)

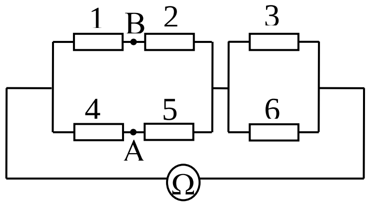
$$\begin{aligned} &2ma_1 = 2mg - N_1 \\ &ma_2 = mg - N_2 \end{aligned}$$

где a_1 и a_2 - проекции векторов ускорений тел на вертикальную ось, направленную вертикально вниз. Учитывая (*), а также то, что $a_2 = -3a_1$, получим

$$a_1 = -\frac{1}{11}g, \qquad a_2 = \frac{3}{11}g\,,$$

Знак минус у ускорения первого тела говорит о том, что вектор его ускорения направлен вверх.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильное соотношение для сил реакции стержня, действующих на тела - 0,5 балла.
2. правильное условие связи ускорений – 0,5 балла.
3. правильный второй закон Ньютона для тел – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла.



5. Поскольку вольтметр и амперметр идеальные, вольтметр можно удалить из цепи без изменения токов во всех ее элементах, а амперметр - заменить куском провода, не имеющим сопротивления. Тогда цепь сводится к цепи, показанной на рисунке, причем вольтметр измеряет напряжение между точками А и В, а амперметр – разность токов через сопротивления 2 и 3 (или 5 и 6). Очевидно, напряжение между точками А и В равно нулю. Действительно, напряжение между А и В можно найти как

$$U_{AB} = \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2} - \frac{U_0 R_4}{R_4 + R_5} = \frac{U_0\left(R_1 R_5 - R_2 R_4\right)}{\left(R_1 + R_2\right)\left(R_4 + R_5\right)} = \frac{U_0\left(3\cdot 2 - 6\cdot 1\right)}{\left(R_1 + R_2\right)\left(R_4 + R_5\right)} = 0$$

где U_0 - напряжение на участке параллельно соединенных резисторов R_1, R_2, R_3, R_4.

Очевидно, по проводам, соединяющим верхнюю и нижнюю ветви цепи, электрический ток не течет. Действительно, как следует из условия, для заданных резисторов выполнено условие

$$\left(R_1 + R_2\right) R_6 = \left(R_4 + R_5\right) R_3$$

Поэтому такая цепь сводится к компенсированному мостику Уитстона, через который не течет ток.

Теперь легко найти показания омметра. Находя общее сопротивление цепи, показанной на рисунке, получим

$$R_{об} = \frac{\left(R_1 + R_2\right)\left(R_4 + R_5\right)}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} + \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6} = 3 \text{ Ом}$$

Именно таким будет показание омметра, который измеряет сопротивление цепи, к которой он подключен. В результате для показаний всех приборов имеем

$$U_V = 0\,,\ I_A = 0\,,\ R_\Omega = \frac{\left(R_1 + R_2\right)\left(R_4 + R_5\right)}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} + \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6} = 3 \text{ Ом}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная эквивалентная цепь – разрыв там, где идеальный вольтметр, замыкание проводником там, где амперметр - 0,5 балла.
2. Правильное напряжение между точками А и В – 0,5 балла.
3. Правильное показание амперметра – 0,5 балла
4. Правильное сопротивление цепи и правильный ответ для показания омметра – 0,5 балла.

6. На пробирку действуют – сила тяжести, сила реакции дна сосуда, сила со стороны точечного тела, равная его силе тяжести, и сила Архимеда. При этом сила тяжести приложена к центру тяжести пробирки, т.е. посередине пробирки. Сила Архимеда приложена к центру тяжести погруженной в воду части пробирки, т.е. к точке, находящейся на расстоянии четверти длины пробирки от ее дна (поскольку по условию пробирка погружена в воду на половину длины). Поэтому уравнение моментов относительно нижней точки пробирки дает

$$mg\frac{l}{2} = F_A\frac{l}{4}$$

где m - масса пустой пробирки. Отсюда находим

$$F_A = 2mg$$

С другой стороны, силу Архимеда можно найти через плотность воды, и объем погруженной в воду части пробирки

$$F_A = \rho g S\frac{l}{2}$$

Отсюда

$$m = \frac{1}{4}\rho l S$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные выражения (значение и точка приложения) для силы Архимеда - 0,5 балла.
2. Правильное условие моментов для пробирки – 0,5 балла.
3. Правильно найдено значение силы Архимеда, действующей на пробирку – 0,5 балла
4. Правильный ответ для массы пустой пробирки – 0,5 балла.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.
2 вариант (критерии оценки задач такие же как в варианте 1)

1. $P' = \frac{4}{3}P$. **2.** $p_1 = \frac{2\left(3\mu_{N_2} + 4\mu_{He}\right)}{3\left(\mu_{N_2} + \mu_{He}\right)}p = 2{,}1\cdot 10^6$ Па. **3.** $a = \frac{3\mu g}{5 + 6\mu}$ **4.** $a_1 = \frac{1}{13}g$, направлено вниз, $a_2 = \frac{3}{11}g$, направлено вверх **5.** $U_V = 0$, $I_A = 0$, $R_\Omega = \frac{(R_1 + R_2)(R_4 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} + \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6} = 3{,}2$ Ом. **6.** $m = \frac{4}{9}\rho l S$