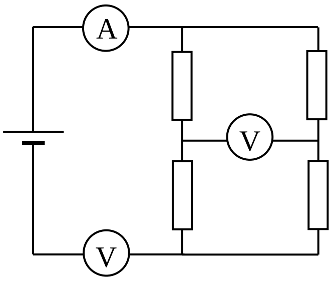
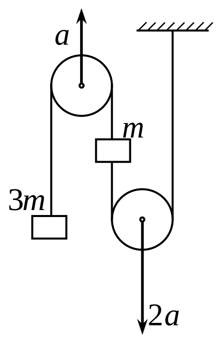
Решения и критерии оценивания задач
Заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике,
2022-2023 учебный год, 11 класс (Москва)

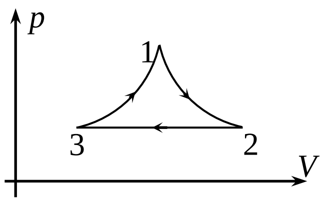


1. Из источника напряжения, двух одинаковых вольтметров, амперметра и четырех резисторов, сопротивление двух из которых равно R, а двух - $3R$, собрали электрическую цепь, схема которой приведена на рисунке. Показания приборов составляют: $U_1 = 0{,}5$ В, $U_2 = 3$ В, $I = 2$ мА. Найти величину R.

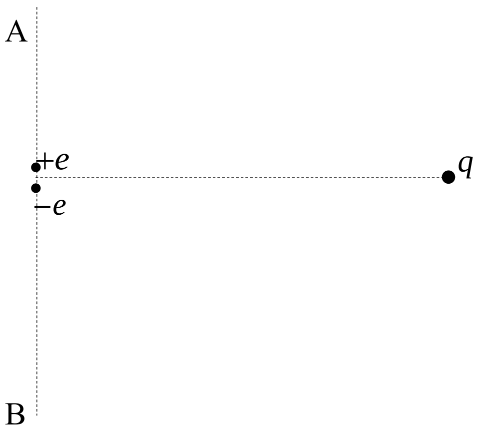


2. В системе двух тел массой m и $3m$ и двух невесомых блоков все тела сначала удерживали в покое. В некоторый момент времени блоки начали тянуть с вертикальными ускорениями a и $2a$ (см. рисунок). Какими силами нужно действовать для этого на блоки? Нити невесомы и нерастяжимы, Все не касающиеся блоков участки нитей вертикальны.

3. С движущейся со скоростью v тележки с такой же скоростью v под некоторым углом к горизонту бросают тело. Чему равна максимально возможная дальность полета тела (расстояние от точки бросания до точки падения тела на землю)? Под каким углом к горизонту (относительно тележки) нужно бросить тело, чтобы дальность его полета была максимальной? Под каким углом к горизонту (относительно земли) начнет в этом случае свое движение тело? Силой сопротивления воздуха пренебречь. Считать, что тележка очень маленькая, и бросок производится практически с поверхности земли.



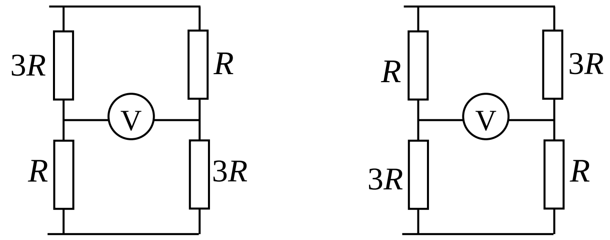
4. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс, график которого в координатах «давление-объем» приведен на рисунке. Известно, что процесс 1-2 – адиабатический, процесс 2-3 – изобарический, график процесса 3-1 получен отражением графика 1-2 относительно вертикальной прямой, проходящей через точку 1, и давление газа изменяется в два раза в течение всего процесса. Найти термодинамический КПД процесса. **Указание.** Давление и объем воздуха в адиабатическом процессе связаны соотношением $pV^{5/3} = const$.



5. Точечный положительный заряд q удерживают на расстоянии l от двух точечных зарядов $+e$ и $-e$ ($e > 0$), закрепленных на очень малом расстоянии d друг от друга. Направление на заряд q из середины отрезка, соединяющего заряды $+e$ и $-e$, перпендикулярно этому отрезку (см. рисунок). В некоторый момент времени заряд q отпускают. На каком расстоянии от середины отрезка, соединяющего заряды $+e$ и $-e$ заряд q пересечет прямую, на которой лежат заряды $+e$ и $-e$ (прямая АВ на рисунке)? Какую скорость он будет иметь в этот момент? Какое ускорение? Масса заряда m. **Указание.** При решении может понадобиться приближенная формула: $1/(1-\delta) \approx 1+\delta$, справедливая для малых δ.

Решения и критерии оценивания

1. Поскольку ток через мостиковый вольтметр не может быть больше тока в цепи, а вольтметры одинаковы, то показания мостикового вольтметра должны быть меньше показаний вольтметра, включенного в цепь. Поэтому $U_1 = 0,5$ В - показания мостикового вольтметра, $U_2 = 3$ В – показания вольтметра, включенного в цепь. Кроме того, очевидно, что в левой ветви и правой ветвях параллельно соединенных резисторов резисторы могут быть соединены только так, как показано на левом или на правом рисунке (при любых других соединениях показания мостикового вольтметра будут нулевыми). При этом разница между этими двумя вариантами будет только в направлении тока через мостиковый вольтметр. Поэтому достаточно рассмотреть только один из них. Рассмотрим левый вариант.



Так как вольтметры одинаковы, то ток $I_{мост}$ через мостиковый вольтметр отличается от тока в цепи во столько же раз, во сколько отличаются показания вольтметров:

$$I_{мост} = \frac{U_1}{U_2} I$$

Отсюда получаем для токов I_R и I_{3R}, текущих через резисторы R и $3R$ соответственно

$$I_R = I_{3R} + I_{мост} = I_{3R} + \frac{U_1}{U_2} I$$

С другой стороны, сумма этих токов равна току в цепи

$$I_R + I_{3R} = I$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$I_R = I \frac{(U_1 + U_2)}{2U_2}, \qquad I_{3R} = I \frac{(U_2 - U_1)}{2U_2}$$

Теперь можно найти падения напряжений на резисторах, разность которых равна напряжению на мостиковом вольтметре

$$U_1 = U_{3R} - U_R = 3RI_{3R} - RI_R = \frac{RI(U_2 - 2U_1)}{U_2}$$

Отсюда находим величину сопротивления R:

$$R = \frac{U_1 U_2}{I(U_2 - 2U_1)} = 375 \text{ Ом}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильно понято расположение резисторов и идентифицированы показания вольтметров (какие показания к какому вольтметру относятся) - 1 балл

2. Правильно найден ток через мостик – 1 балл

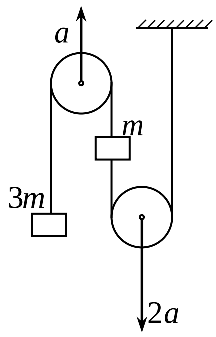
3. Правильно найдены токи через резисторы – 1 балл

4. Правильное уравнение для сопротивления – 1 балл

5. Правильный ответ (формула и число) – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Поскольку блоки начали двигаться из состояния покоя, скорости блоков пропорциональны их ускорениям. Поэтому в любой момент времени скорости блоков относятся как 2:1 (начиная с правого-нижнего). Пусть за некоторый малый интервал времени правый-нижний блок совершил перемещение Δx вниз. Тогда нить справа от него удлинилась на Δx. Также на Δx опустилась и точка этого блока, от которой идет нить к телу массой m. А поскольку нить нерастяжима, тело массой m сместилось вниз на $2\Delta x$. Это значит, что в любой момент времени скорость тела массой m вдвое больше скорости правого-нижнего блока. Таким же будет и соотношение ускорения этого тела и ускорения правого-нижнего блока



$$a_m = 4a$$

Левый-верхний блок за это же время поднимется вверх на величину $\Delta x/2$ (его ускорение вдвое меньше ускорения правого-нижнего блока). Поэтому участок нити от тела массой m до левого-верхнего блока станет длиннее на $2\Delta x + \Delta x/2$. На $\Delta x/2$ поднимется и точка левого-верхнего блока, от которой идет нить к телу массой $3m$. Поэтому это тело переместится вверх на расстояние $3\Delta x$, и, следовательно, это тело будет иметь ускорение

$$a_{3m} = 6a$$

Поэтому из второго закона Ньютона для этого тела получаем силу натяжения нити, привязанной к телу массой $3m$

$$3m6a = T_1 - 3mg \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = 3m(6a+g)$$

Для тела массой m второй закон Ньютона дает

$$m4a = T_2 + mg - T_1 \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = 2m(11a+g)$$

А поскольку блоки невесомы, на них нужно действовать силой, равной удвоенной силе натяжения охватывающей блок нити

$$F_a = 6m(6a+g), \qquad F_{2a} = 4m(11a+g)$$

где F_a и F_{2a} - искомые силы, которыми нужно действовать на блоки, движущиеся с ускорениями a и $2a$ соответственно.

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно (из условий связи) найдено ускорение тела массой m - 1 балл
2. Правильно (из условий связи) найдено ускорение тела массой $3m$ – 1 балл
3. Правильный второй закон Ньютона для тела массой m – 1 балл
4. Правильный второй закон Ньютона для тела массой $3m$ – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Чтобы дальность S полета тела была максимальной, нужно бросать его в направлении движения тележки. Тогда дальность полета определяется очевидным соотношением

$$S = vt + v\cos\alpha t \qquad (1)$$

где v - скорость движения тележки (и она же – по условию – начальная скорость тела относительно тележки), t - время движения тела, α - угол, под которым бросили тело в системе отсчета, связанной с тележкой (эта формула легко получается с помощью перехода в систему отсчета, связанную с тележкой).

Известно, что максимальная дальность полета тела (в покоящейся системе отсчета) достигается при броске под углом $\alpha = 45°$. Однако это вовсе не означает, что дальность (1) будет максимальна при таком броске. Действительно, может так случиться, что при броске под б**о**льшим углом за счет большего перемещения самой тележки дальность полета будет больше, даже при меньшей дальности полета относительно тележки. Поэтому для нахождения максимальной дальности полета нужно аккуратно находить максимум соотношения (1). Выполним это нахождение.

Полное время движения тела, брошенного под углом к горизонту, определяется y-компонентой начальной скорости тела ($v\sin\alpha$):

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}$$

Поэтому дальность полета тела равна

$$S = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha + \frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

Находя производную этого выражения по α и приравнивая ее к нулю, получим уравнение для угла бросания (относительно тележки), при котором дальность полета максимальна

$$S' = \frac{2v^2}{g}\cos\alpha + \frac{2v^2}{g}\cos^2\alpha - \frac{2v^2}{g}\sin^2\alpha = 0$$

или

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 60°$$

(второй корень - $\cos\alpha = -1$ - определяет минимальную дальность полета тела). Подставляя этот угол в формулу для дальности полета, найдем ее максимальное значение

$$S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{2g}$$

Вектор начальной скорости тела относительно земли можно найти по закону сложения скоростей

$$\vec{v}_{тела,отн.земли} = \vec{v}_{тела,отн.тележки} + \vec{v}_{тележки} \qquad (2)$$

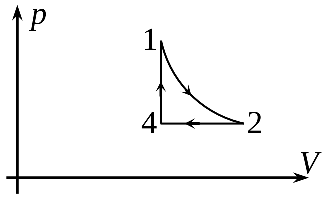
Поскольку модули вектора скорости тележки и тела относительно тележки равны друг другу, то параллелограмм сложения скоростей является ромбом. А поскольку диагональ ромба ($\vec{v}_{тела,отн.земли}$)

делит его углы пополам, то вектор $\vec{v}_{тела,отн.земли}$ направлен под в два раза меньшим углом к горизонту, т.е. под углом

$$\alpha_{отн.земли} = 30^\circ$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная идея решения – нахождение дальности полета с помощью перехода в систему отсчета, связанную с тележкой и максимума этого выражения - 1 балл
2. Правильная формула для времени движения – 1 балл
3. Правильная формула для дальности полета – 1 балл
4. Правильный ответ для максимальной дальности полета и угла бросания в системе отсчета, связанной с тележкой – 1 балл
5. Правильный ответ для угла бросания в системе отсчета, связанной с землей – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу и найдем термодинамический КПД процесса, представляющего «половину» заданного цикла: 1-2 – адиабата, 2-4 – изобара, 4-1 изохора. Очевидно, в этом процессе газ получает тепло на изохоре 4-1, отдает на изобаре 2-4. Поэтому термодинамический КПД η рассматриваемого процесса равен



$$\eta = \frac{Q_{4-1} - Q_{2-4}}{Q_{4-1}} \tag{1}$$

где Q_{4-1} - количество теплоты, полученное газом от нагревателя в процессе 4-1, Q_{2-4} - количество теплоты, отданное газом холодильнику в процессе 2-4. Найдем эти количества.

Поскольку в процессе 4-1 газ не совершает работу, количество полученной газом теплоты равно изменению его внутренней энергии. С использованием закона Клапейрона-Менделеева найдем

$$Q_{4-1} = \Delta U_{4-1} = \frac{3}{2}\nu R \Delta T_{4-1} = \frac{3}{2}\left(2p_4V_4 - p_4V_4\right) = \frac{3}{2}p_4V_4 \tag{2}$$

где p_4 и V_4 - давление и объем газа в состоянии 4 (в формуле (2) учтено, что давление газа меняется в 2 раза в рассматриваемом процессе).

Процесс 2-4 – изобарический, поэтому количество теплоты отданное газом в этом процессе, составляет 5/2 от работы, совершенной внешними силами над газом в этом процессе

$$Q_{2-4} = \frac{5}{2}A_{2-4} = \frac{5}{2}p_4\left(V_2 - V_4\right)$$

где V_2 - объем газа в состоянии 2. Найдем его, используя уравнение адиабаты, данное в указании к условию. Имеем

$$2p_4V_4^{5/3} = p_4V_2^{5/3}$$

Отсюда

$$V_2 = 2^{3/5}V_4$$

В результате для количества теплоты, отданного газом холодильнику в процессе 2-4, получаем

$$Q_{2-4} = \frac{5}{2} p_4 V_4 \left(2^{3/5} - 1\right) \quad (3)$$

А из (1)-(3) – КПД вспомогательного процесса

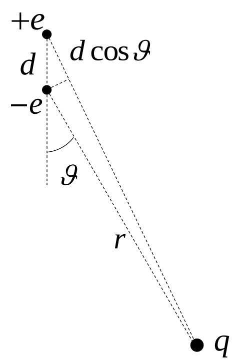
$$\eta = \frac{Q_{4-1} - Q_{2-4}}{Q_{4-1}} = \frac{8 - 5 \cdot 2^{3/5}}{3} \approx 0{,}14$$

Вернемся теперь к процессу, данному в условии. Очевидно, что его термодинамический КПД совпадает с термодинамическим КПД, рассмотренного выше вспомогательного процесса. Действительно, работа газа в процессе, данном в условии, в два раза больше работы газа в рассмотренном вспомогательном процессе (т.к. в два раза больше площадь цикла). Также в два раза отличаются и количества теплоты, отданные газом холодильнику в этих процессах. Это связано с тем, что в исследуемом процессе теплота отдается холодильнику только в изобарическом процессе 2-4, а изменение объема газа в два раза больше изменения объема во вспомогательном процессе. Поэтому КПД исследуемого цикла есть

$$\eta_{иссл} = \frac{2A}{2A + 2Q_{2-4}} = \frac{A}{A + Q_{2-4}} = \eta = \frac{8 - 5 \cdot 2^{3/5}}{3} \approx 0{,}14$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Использование правильного определения термодинамического КПД - 1 балл
2. Вычисление количеств теплоты, полученного от нагревателя и отданного холодильнику в «половинном» цикле – 1 балл
3. Правильное нахождение КПД «половинного» цикла – 1 балл
4. Доказательство, что КПД полного и «половинного» цикла совпадают – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.
При правильном нахождении количеств теплоты, полученного в процессе 3-1 и отданного в процессе 2-3 в заданном в условии цикле (без его деления пополам), и правильном нахождении КПД ставится полный балл.

5. Найдем сначала потенциальную энергию взаимодействия точечного заряда q и двух близко расположенных зарядов $+e$ и $-e$ (такая система называется электрическим диполем). Пусть заряд q находится на расстоянии r от отрицательного заряда диполя, так, что угол между отрезком, соединяющем заряды $+e$ и $-e$ и направлением на заряд q равен ϑ (см. рисунок). Тогда, поскольку расстояние до положительного заряда будет на величину $d\cos\vartheta$ больше, чем r, потенциальная энергия взаимодействия заряда q и диполя равна



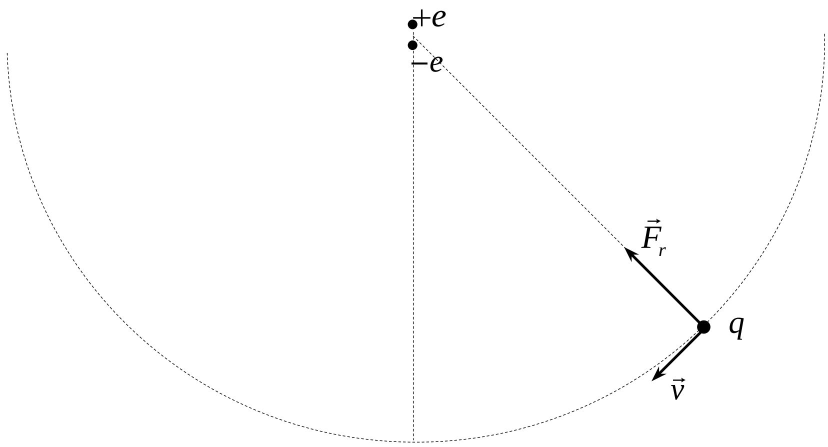
$$U(r,\vartheta) = -\frac{keq}{r} + \frac{keq}{r + d\cos\vartheta} = -\frac{keq}{r} + \frac{keq}{r\left(1 + (d\cos\vartheta / r)\right)}$$

Пользуясь далее приближенной формулой, данной в указании к условию, получим

$$U(r,\vartheta) \approx -\frac{keq}{r} + \frac{keq}{r}\left(1 - \frac{d\cos\vartheta}{r}\right) = -\frac{keqd}{r^2}\cos\vartheta \quad (1)$$

Используя эту формулу, докажем, что точечный заряд q будет двигаться вокруг диполя по полуокружности радиуса l с центром в центре диполя (см. рисунок). Для этого в любой точке этой полуокружности должно быть выполнено следующее условие – скорость v заряда q и радиальная составляющая силы, действующей на заряд со стороны диполя, связаны соотношением

$$\frac{mv^2}{l} = F_r \qquad (2)$$



Скорость заряда найдем по закону сохранения энергии. Имеем из (1)

$$U\left(l, \vartheta = \frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{keqd}{l^2}\cos\vartheta$$

Отсюда находим скорость заряда q

$$v = \sqrt{\frac{2keqd\cos\vartheta}{ml^2}} \qquad (3)$$

Радиальную составляющую силы, действующей на заряд q со стороны диполя, найдем с помощью закона Кулона. Пренебрегая слагаемым, содержащим d^2 по сравнению со слагаемым, содержащим d, имеем

$$F_r = \frac{keq}{l^2} - \frac{keq}{\left(l + d\cos\vartheta\right)^2} = \frac{keq}{l^2} - \frac{keq}{l^2 + 2ld\cos\vartheta + d^2\cos^2\vartheta} \approx \frac{keq}{l^2} - \frac{keq}{l^2 + 2ld\cos\vartheta}$$

Используя теперь формулу указания к условию задачи, получим

$$F_r \approx \frac{keq}{l^2} - \frac{keq}{l^2}\left(1 - \frac{2d\cos\vartheta}{l}\right) = \frac{2keqd\cos\vartheta}{l^3} \qquad (4)$$

Используя теперь скорость (3) и радиальную составляющую силы (4), видим, что для любого угла ϑ (в том числе и для $\vartheta = 90°$, когда заряд q только начинает двигаться) условие (2) выполнено. Это значит, что заряд движется по полуокружности радиуса l с центром в середине диполя.

Скорость заряда в момент пересечения прямой, на которой лежат заряды $+e$ и $-e$, найдем по закону сохранения энергии. Учитывая, что расстояние от заряда до диполя равно l, получаем

$$0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{keqd}{l^2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2keqd}{ml^2}}$$

Так как заряд q движется по окружности радиуса l, и в точке на прямой АВ его скорость достигает максимума, то ее величина в этой точке практически не меняется. Поэтому ускорение заряда – центростремительное, которое равно

$$a = \frac{v^2}{l} = \frac{2keqd}{ml^3}$$

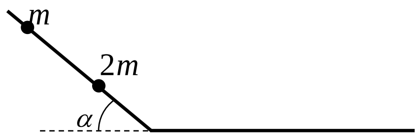
Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное нахождение потенциальной энергии взаимодействия точечного заряда и диполя - 1 балл

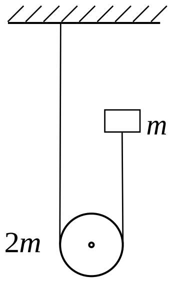
2. Правильное нахождение скорости заряда как функции угла поворота и расстояния до диполя – 1 балл
3. Правильное нахождение радиальной составляющей силы, действующей на заряд со стороны диполя – 1 балл
4. Правильный вывод (с обоснованием) о движении заряда по окружности – 1 балл
5. Правильный ответ для скорости заряда в тот момент, когда он пересекает ось диполя – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.

Решения и критерии оценивания задач
Заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике,
2022-2023 учебный год, 11 класс (регионы)

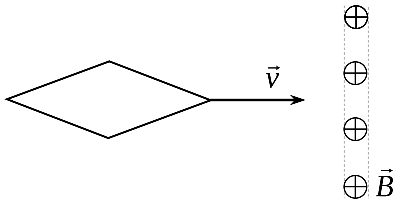
1. Длинная проволока изогнута и расположена в пространстве так, что один ее конец наклонен под углом α к горизонту, второй – горизонтален (см. рисунок). На наклонный участок проволоки надеты две маленькие бусинки массой $2m$ и m (см. рисунок). Расстояние от бусинок до изгиба проволоки - l и $3l$. Бусинки одновременно отпускают, и они начинают двигаться без начальной скорости. Через некоторое время бусинки сталкиваются, и происходит абсолютно неупругое столкновение. Найти количество теплоты, выделившееся при столкновении. Трение отсутствует.



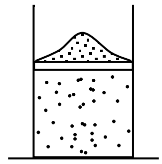


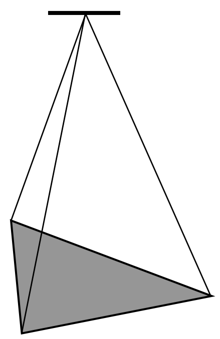
2. Невесомая и нерастяжимая веревка привязана одним концом к горизонтальному потолку, другим - к телу массой m. Веревка охватывает подвижный блок массой $2m$, вся масса которого сосредоточена в его оси. Блок и тело удерживают так, что веревка натянута (см. рисунок). В некоторый момент тело и блок отпускают. Найти ускорение блока и ускорение тела.

3. Проводящий контур в форме ромба со стороной a и с отношением диагоналей 2:1 движется с постоянной скоростью v вдоль более длинной диагонали. Контур пересекает узкую область шириной d, в которой создано магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости контура. Найти количество теплоты, которое выделится в контуре за время его пролета через область поля. Электрическое сопротивление контура R. Считать, что ширина области поля d много меньше a. Границы области поля перпендикулярны скорости контура.



4. В сосуде под массивным поршнем, на котором лежит куча песка, находится одноатомный идеальный газ. Объем газа V, давление p. Если песок снимать с поршня медленно - по одной песчинке, - то объем газа увеличится вдвое, когда весь песок будет снят. Какой была бы кинетическая энергия поршня в тот момент, когда объем газа возрастет вдвое, если бы весь песок сняли с поршня сразу? Атмосферное давление отсутствует. Сосуд с газом очень хорошо теплоизолирован. **Указание.** В адиабатическом процессе давление и объем одноатомного идеального газа связаны соотношением $pV^{5/3} = const$.





5. Вырезанный из листа фанеры равносторонний треугольник подвешен за три нити, которые одними своими концами прикреплены к вершинам треугольника, а вторыми - к одной точке на потолке. Длины нитей равны l, l и $1,2l$. Размер стороны треугольника a. Сила натяжения самой короткой нити известна и равна T. Найти силу натяжения нити, имеющей длину $1,2l$. Все нити натянуты.

Решения и критерии оценивания

1. Поскольку движение бусинок по наклонной части проволоки происходит с нулевыми начальными скоростями и одинаковыми ускорениями, то верхняя не догонит нижнюю на наклонном участке проволоки. На горизонтальном участке проволоки бусинки будут двигаться с постоянными скоростями, при этом верхняя – с большей скоростью (так как спускалась с большей высоты). Поэтому столкновение бусинок произойдет на горизонтальном участке проволоки.

Скорости бусинок перед столкновением найдем по закону сохранению энергии. Для нижней бусинки имеем

$$2mgl\sin\alpha = \frac{2mv_1^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}\ .$$

Аналогично для верхней

$$mg3l\sin\alpha = \frac{mv_2^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \sqrt{6gl\sin\alpha}\ .$$

Поскольку столкновение бусинок абсолютно неупругое, в результате столкновения они слипнутся. По закону сохранения импульса находим скорость v бусинок после столкновения

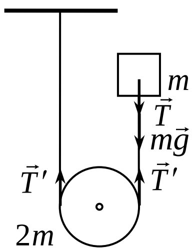
$$2mv_1 + mv_2 = 3mv \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{2v_1}{3} + \frac{v_2}{3}$$

Теперь по закону сохранения энергии находим количество выделившегося тепла

$$Q = \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{3mv^2}{2} = \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{3}mgl\sin\alpha = 0,357mgl\sin\alpha$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная идея решения – верхняя бусинка догонит нижнюю, по законам сохранения энергии и импульса найти тепло, выделившееся при неупругом столкновении - 1 балл
2. По закону сохранения энергии (или по законам равноускоренного движения) правильно найдены скорости бусинок после спуска – 1 балл
3. Правильно найдена скорость слипшихся бусинок – 1 балл
4. Правильный закон сохранения энергии – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Очевидно, что в процессе падения тел нить будет натянута. Действительно, если бы нить не была натянута, то блок падал бы с ускорением g, и с той стороны, где расположено тело, «вытягивал» такую длину нити, что ускорение тела должно было бы равняться $2g$, что может быть обеспечено только натянутой нитью. Это значит, что нить натянута и вместе с силой тяжести дает телу ускорение, большее, чем g, а блоку – ускорение, меньшее, чем g.



На тело действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. На блок действуют сила тяжести $2m\vec{g}$ и две силы натяжения нити $\vec{T}'$, которые равны друг другу, поскольку масса блока сосре6доточена на оси. Поэтому второй закон Ньютона для тела и блока в проекциях на вертикальную ось дает

$$ma_1 = mg + T$$
$$2ma_2 = 2mg - 2T$$

Учитывая, что ускорение тела вдвое больше ускорения блока, получим

$$a_1 = \frac{4g}{3}, \qquad a_2 = \frac{2g}{3}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильный второй закон Ньютона для тела - 1 балл
2. Правильный второй закон Ньютона для блока – 1 балл
3. Правильные условия связи сил натяжения – 1 балл
4. Правильные условия связи ускорений – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

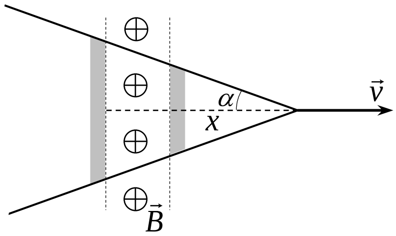
3. Проводящий контур в форме ромба со стороной a и с отношением диагоналей 2:1 движется с постоянной скоростью v вдоль более длинной диагонали. Контур пересекает узкую область шириной d, в которой создано магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости контура. Найти количество теплоты, которое выделится в контуре за время его пролета через область поля. Электрическое сопротивление контура R. Считать, что ширина области поля d много меньше a. Границы области поля перпендикулярны скорости контура.

2. Пока контур пересекает область поля, в нем будет наводится ЭДС индукции, и течь электрический ток. По закону электромагнитной индукции ЭДС индукции определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\Delta S}{\Delta t}$$

где $\Delta\Phi$ - изменение магнитного потока за время Δt, B - индукция магнитного поля в области поля, ΔS - изменение площади контура, находящейся в поле. Найдем величину ΔS.

Пусть в некоторый момент времени контур по отношению к магнитному полю расположен так, как это показано на рисунке. Тогда изменение площади контура, находящейся в поле, связано с тем, что при движении контура «выходит» из области поля меньшая площадь, чем «входит» в область поля. Действительно, за малое время Δt из области поля «выйдет» кусочек площади величиной $x\,\mathrm{tg}\alpha v\Delta t$, а «войдет» - $(x+d)\mathrm{tg}\alpha v\Delta t$, где x - расстояние от вершины контура до ближайшей к ней границы поля, α - половина угла при вершине контура, v - скорость контура (см. рисунок; кусочки площади контура, входящие и выходящие из магнитного поля, показаны серой заливкой). Поэтому изменение площади контура, находящейся в поле, можно найти как



$$\Delta S = 2\left((x+d)\mathrm{tg}\alpha v\Delta t - x\,\mathrm{tg}\alpha v\Delta t\right) = 2d\,\mathrm{tg}\alpha v\Delta t$$

Отсюда получаем, что ЭДС индукции

$$\varepsilon = 2Bdv\,\mathrm{tg}\alpha$$

не зависит от того, какая часть контура находится в данный момент в области поля. Поэтому в течение всего времени, пока контур находится в поле, в нем будет течь постоянный ток

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2Bdv\,\mathrm{tg}\alpha}{R}$$

(R - сопротивление контура), и будет рассеиваться тепло мощностью

$$I^2R = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{\left(2Bdv\,\mathrm{tg}\alpha\right)^2}{R}$$

Поскольку контру движется с постоянной скоростью, то время, в течение которого контур находится в поле, определяется соотношением

$$t = \frac{2a\cos\alpha}{v}$$

Находим полное количество выделенного тепла

$$Q = Pt = \frac{8aB^2d^2v\,\mathrm{tg}^2\alpha\cos\alpha}{R}$$

Учитывая, что $\mathrm{tg}\alpha = 1/2$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, получим окончательно

$$Q = Pt = \frac{4aB^2d^2v}{\sqrt{5}R}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная идея решения – использовать закон электромагнитной индукции - 1 балл
2. Правильно найдено изменение площади контура, находящейся в магнитном поле – 1 балл
3. Правильно найдена ЭДС индукции – 1 балл
4. Правильный закон Джоуля-Ленца – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Поскольку сосуд теплоизолирован, с газом происходит адиабатический процесс. Конечное давление газа p_1 найдем по закону адиабатического процесса

$$pV^{5/3} = p_1\left(2V\right)^{5/3}$$

Отсюда находим

$$p_1 = \frac{p}{2^{5/3}}$$

Так как процесс, происходящий с газом, – адиабатический, работа газа равна уменьшению его внутренней энергии

$$A = U - U_1 = \frac{3}{2}\left(pV - p_1 2V\right) = \frac{3}{2}pV\left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right)$$

В первом случае эта работа тратилась на увеличение потенциальной энергии поршня и песка, который распределится по высоте между начальным и конечным положениями поршня. Во втором случае эта работа тратится на увеличение потенциальной и кинетической энергий поршня, поскольку весь песок остается на том же уровне, на котором поршень был первоначально. Поэтому

$$A = Mgh + E_k$$

где M - масса поршня, h - высота подъема поршня (которая равна высоте расположения поршня над дном сосуда в начальном состоянии), E_k - кинетическая энергия поршня. Величину Mgh можно найти из условия равновесия поршня. Имеем

$$Mg = p_1 S$$

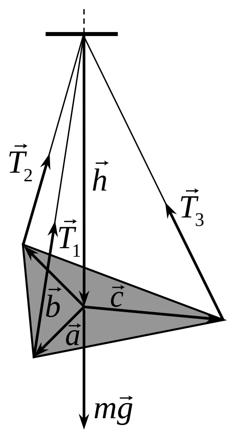
где S - площадь сечения сосуда. Умножая эту формулу на h и учитывая, что $Sh = V$, получим

$$Mgh = p_1 V = \frac{pV}{2^{5/3}}$$

Поэтому для кинетической энергии поршня получаем

$$E_k = A - Mgh = \frac{3}{2} pV\left(1 - \frac{1}{2^{2/3}}\right) - \frac{pV}{2^{5/3}} = pV\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^{5/3}}\right)$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно найдено давление газа в конечном состоянии - 1 балл
2. Правильно найдена работа газа – 1 балл
3. Правильные условия равновесия поршня в конечном состоянии – 1 балл
4. Правильная масса поршня – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

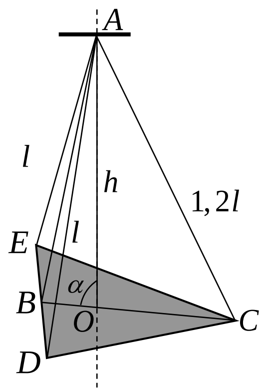


5. Докажем сначала, что силы натяжения нитей пропорциональны их длинам. Условие равновесия треугольника дает

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 + m\vec{g} = 0$$

где m - его масса. С другой стороны, центр тяжести треугольника лежит под точкой крепления нитей, поэтому если ввести вспомогательные векторы: $\vec{h}$ - из точки крепления нитей в центр тяжести треугольника, и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - из центра тяжести треугольника в его вершины, то, во-первых, вектор $\vec{h}$ направлен вертикально вниз, а во-вторых, векторы $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_3$ можно представить как $\vec{T}_1 = -k_1(\vec{h} + \vec{a})$, $\vec{T}_2 = -k_2(\vec{h} + \vec{b})$, $\vec{T}_3 = -k_3(\vec{h} + \vec{c})$, где k_1, k_2 и k_3 - некоторые числа, имеющие размерности Н/м. Подставляя силы натяжения в условие равновесия треугольника, получим

$$-k_1\left(\vec{h} + \vec{a}\right) - k_2\left(\vec{h} + \vec{b}\right) - k_3\left(\vec{h} + \vec{c}\right) + m\vec{g} = 0$$



Поскольку $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, то $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$, и условие равновесия треугольника дает

$$\left\{m\vec{g} - \vec{h}\left(k_1 + k_2 + k_3\right)\right\} + \left(k_3 - k_1\right)\vec{a} - \left(k_3 - k_2\right)\vec{b} = 0$$

Но второй и третий векторы в сумме лежат в плоскости треугольника (и, следовательно, их сумма – тоже), а первый вектор направлен вертикально вниз. Поэтому их сумма будет равна нулю только при условии, что эти векторы нулевые. Или

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{mg}{3h}$$

Таким образом, силы натяжения нитей пропорциональны длинам самих нитей, а коэффициент пропорциональности определяется массой треугольника и расстоянием от точки крепления нитей до центра треугольника. Найдем теперь геометрически это расстояние. Пусть $AE = AD = l$, $AC = 1,2l$, $\angle AOB = \alpha$. Тогда

$$AB = \sqrt{l^2 - (a/2)^2},\ OB = \frac{\sqrt{3}a}{6},\ OC = \frac{\sqrt{3}a}{3},\ \angle AOC = \pi - \alpha$$

Применяя теперь теорему косинусов к треугольникам AOB и AOC, получим

$$l^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12} + h^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} ah\cos\alpha$$

$$1,44l^2 = \frac{a^2}{3} + h^2 + 2\frac{\sqrt{3}}{3} ah\cos\alpha$$

Умножая теперь первое уравнение на два и складывая, найдем расстояние от точки крепления нитей до центра треугольника

$$h = \sqrt{\frac{3,44l^2 - a^2}{3}}$$

Отсюда находим коэффициент пропорциональности между силами натяжения нитей и их длинами

$$k = \frac{mg}{\sqrt{3\left(3,44l^2 - a^2\right)}}$$

и силы натяжения нитей

$$T_1 = T_2 = \frac{mgl}{\sqrt{3\left(3,44l^2 - a^2\right)}}, \qquad T_3 = \frac{1,2mgl}{\sqrt{3\left(3,44l^2 - a^2\right)}}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильные условия равновесия треугольника - 1 балл
2. Доказано, что силы натяжения нитей пропорциональны их длинам – 2 балла
3. Геометрически найдено расстояние от точки крепления нитей до центра треугольника – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.