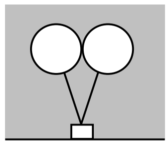
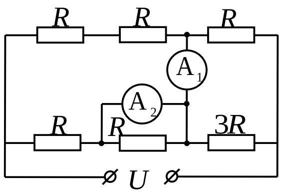
Решения
Отборочный тур олимпиады «Росатом», 2022-2023 учебный год,
физика, 11 класс

1. Два тела бросили из одной точки поверхности земли с одинаковыми начальными скоростями под разными углами к горизонту. Тела упали в одну и ту же точку через время t и $2t$ после броска. Под каким углом к горизонту бросили первое тело, а под каким второе тело?

2. Два одинаковых сферических поплавка радиуса R и массой m плавают в воде, погрузившись в нее наполовину. К поплавкам привязывают веревку длиной l, к середине которой прикрепляют тяжелый груз. Поплавки с грузом тонут (см. рисунок). Найти силу натяжения веревки и силу, с которой шары действуют друг на друга.

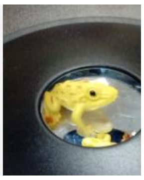


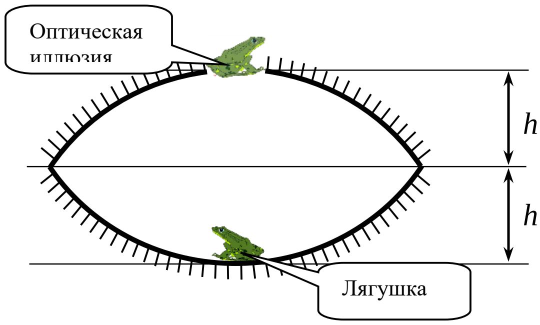


3. В цепи, схема которой представлена на рисунке, $R = 10$ Ом, амперметры идеальны, провода сопротивления не имеют. Напряжение U на зажимах источника $U = 100$ В. Найти показания амперметров.

4. Горизонтальный цилиндрический сосуд разделен на две равные части тонким подвижным поршнем. Вначале поршень удерживают, а в отсеках сосуда размещают ν и 2ν молей одноатомного идеального газа при одинаковой температуре. Затем поршень отпускают. Найти объемы отсеков сосуда в тот момент, когда поршень достигнет максимальной скорости. Объем сосуда - V. Трением и теплообменом пренебречь. Считать, что поршень движется достаточно медленно так, что выполнены условия адиабатичности процессов, происходящих с газом в отсеках сосуда. **Указание.** Для адиабатического процесса справедливо уравнение: $pV^{5/3} = \text{const}$. $pV^{5/3} = \text{const}$.

5. Оптическая игрушка «Мираскоп» представляет собой два вогнутых сферических зеркала (одно – с отверстием) и маленький предмет – игрушечную лягушку. Зеркала ставят друг на друга зеркальными поверхностями друг к другу так, что отверстие находится в верхнем зеркале, лягушку кладут в центр нижнего зеркала на его поверхность (левый рисунок; верхнее зеркало приподнято, чтобы было видно лягушку). В результате возникает оптическая иллюзия: кажется, что лягушка сидит посередине отверстия в верхнем зеркале, перевернутая по сравнению с настоящей лягушкой в горизонтальном направлении, не перевернутая в вертикальном и несколько больше самой лягушки. Иллюзия сохраняется и на фотографии (то, что мы видим на среднем рисунке не лягушка, а иллюзия; «кусочек» настоящей лягушки виден в самой нижней части отверстия). Считая известным, что сферическое зеркало создает изображение любого источника, объясните: (1) почему возникает оптическая иллюзия? (2) почему иллюзия перевернута в горизонтальном направлении, но не перевернута в вертикальном? (3) Считая, что высота h каждого зеркала равна $R/4$ (см. рисунок), а высота лягушки $\delta = R/8$ (где R - радиус кривизны зеркал), оцените, во сколько раз иллюзия больше настоящей лягушки. Считать, что все лучи, падают на поверхности зеркал под малыми углами (параксиальное приближение).





Решения

1. Пусть первое тело бросили под углом α, второе под углом β. Дальность полета тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, определяется соотношением

$$l = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Чтобы дальность полета для разных углов α и β совпадала, нужно, чтобы

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

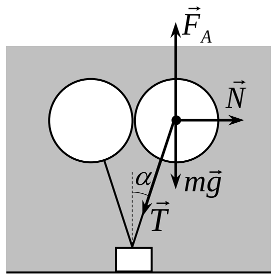
Далее, из формулы для времени движения имеем

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \text{ и } 2t = \frac{2v_0 \sin\beta}{g} = \frac{2v_0 \cos\alpha}{g}$$

Деля эти формулы друг на друга, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использование правильной формулы для дальности полета – 0,5 балла
2. Правильное соотношение между углами бросания – 0,5 балла
3. Использование правильной формулы для времени полета – 0,5 балла
4. Правильный ответ для углов бросания – 0,5 балла



2. На каждый шар действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения веревки $\vec{T}$, сила Архимеда $\vec{F}_A$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны второго тела, направленная горизонтально (см. рисунок; показаны силы, действующие только на один шар). Из условия равновесия шаров имеем

$$T\cos\alpha + mg = F_A$$

где α - угол между веревкой и вертикалью. Поскольку свободно плавающие шары погружаются в воду на половину объема, сила Архимеда, действующая на полностью погруженный в воду шар, вдвое больше его силы тяжести. Поэтому условие равновесия дает

$$T\cos\alpha = mg$$

Косинус угла α легко найти геометрически. Очевидно

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(l/2+R)^2 - R^2}}{l/2+R} = \frac{\sqrt{l(l+4R)}}{l+2R}$$

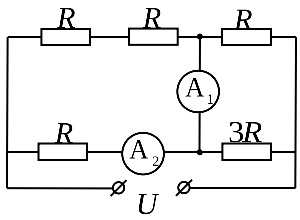
Отсюда находим

$$T = \frac{mg(l+2R)}{\sqrt{l(l+4R)}}$$

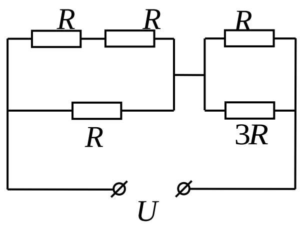
Сила реакции шаров равна горизонтальной проекции силы натяжения нити

$$N = T\sin\alpha = T\frac{R}{l/2+R} = \frac{2mgR}{\sqrt{l(l+4R)}}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное условие равновесия шаров в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси – 0,5 балла
2. Правильно найдена сила Архимеда, действующая на шар – 0,5 балла
3. Правильные формулы для тригонометрических функций через радиус шара и длину нити – 0,5 балла
4. Правильный ответ для силы реакции – 0,5 балла



3. Поскольку амперметры и провода не имеют сопротивления, напряжение на среднем резисторе в нижней ветви цепи равно нулю, и ток через него не течет. Поэтому этот резистор можно удалить из цепи без изменения токов во всех остальных участках, и представить данную цепь в виде, показанном на верхнем рисунке. Из этого рисунка видим, что показания амперметра A_1 – ток I_1 - равен разности токов, текущих через два левых резистора в верхней ветви и правый резистор в верхней ветви цепи. А показания амперметра A_2 - ток I_2 - равен току, текущему через левый резистор в нижней ветви цепи.



А эти токи легко найти, заменив амперметры проводами с нулевым сопротивлением - см. нижний рисунок, из которого видим, что наша цепь представляет собой два последовательно соединенных участка, один из которых параллельное соединение двух резисторов R и одного R, а второй – параллельное соединение резисторов R и $3R$.

Общее сопротивление цепи находим по стандартным правилам сложения последовательно и параллельно соединенных резисторов

$$R_{об}=\frac{17R}{12}$$

Потому ток в цепи равен

$$I=\frac{12U}{17R}$$

В левом блоке параллельных резисторов $R-R$ и R этот ток делится в пропорции 1:2, в правом блоке параллельных резисторов R и $3R$ - в пропорции 3:1. Отсюда можно найти токи, текущие через все резсторы.

Через левую-верхнюю ветвь цепи (резисторы R и R) течет ток

$$I_{R-R}=\frac{1}{3}I=\frac{4U}{17R}.$$

Через левую-нижнюю ветвь (нижний резистор R) течет ток

$$I_{R,н}=\frac{2}{3}I=\frac{8U}{17R}$$

Через правую-верхнюю ветвь (верхний резистор R) течет ток

$$I_{R,в}=\frac{3}{4}I=\frac{9U}{17R}$$

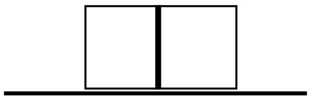
Через правую нижнюю ветвь (резистор $3R$) течет ток

$$I_{3R} = \frac{1}{4} I = \frac{3U}{17R}$$

Отсюда получаем

$$I_1 = I_{R,в} - I_{R-R} = \frac{9U}{17R} - \frac{4U}{17R} = \frac{5U}{17R} = 2{,}9 \text{ А}, \qquad I_2 = I_{R,н} = \frac{8U}{17R} = 4{,}7 \text{ А}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное (и обоснованное) выбрасывание нижнего центрального резистора – 0,5 балла
2. Правильно найдено общее сопротивление цепи – 0,5 балла
3. Правильный ответ для показаний амперметра A$_2$ – 0,5 балла
4. Правильный ответ для показаний амперметра A$_1$ – 0,5 балла



4. Из-за разных концентраций молекул давление газа в отсеках будет отличаться вдвое, и поршень после освобождения начнет двигаться. При этом давление газа в отсеке с бóльшим давлением будет убывать, в отсеке с меньшим давлением расти. Очевидно, что поршень будет разгоняться вплоть до того момента, пока давления в отсеках сосуда не сравняются. Пусть давление газа в отсеках сосуда в этот момент равно p, а объемы отсеков - v и $V-v$ (где v - объем того отсека, где содержится меньшее количество газа, V - объем всего сосуда за вычетом объема поршня). Тогда уравнение адиабатического процесса, данное в указании к условию дает

$$pv^{5/3} = p_0\left(V/2\right)^{5/3}, \quad p\left(V-v\right)^{5/3} = 2p_0\left(V/2\right)^{5/3}$$

где p_0 - первоначальное давление в том отсеке, где содержится меньшее количество газа (здесь учтено, что давление в отсеке с бóльшим количеством газа вдвое больше). Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{v^{5/3}}{\left(V-v\right)^{5/3}} = \frac{1}{2}$$

Отсюда находим объемы отсеков сосуда в момент достижения поршнем максимальной скорости

$$v_1 = v = \frac{V}{1+2^{3/5}}, \qquad v_2 = V - v = \frac{2^{3/5}V}{1+2^{3/5}}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – скорость поршня достигает максимального значения, когда давления в отсеках сосуда сравниваются друг с другом – 0,5 балла
2. Правильное использование уравнения адиабаты для газа в отсеках сосуда – 0,5 балла
3. Правильное уравнение для объема отсеков сосуда – 0,5 балла
4. Правильные ответы для объемов отсеков сосуда – 0,5 балла

5. Введем несколько определений. Назовем центр сферы, образующей зеркало (т. O на рисунке) оптическим центром зеркала, прямую AB, проходящую через центр перпендикулярно кругу, «замыкающему зеркало», главной оптической осью зеркала, точку пересечения главной оптической оси и зеркала (точку P) – полюсом зеркала, точку F, лежащую на главной оптической оси посередине между центром и полюсом (на расстоянии $R/2$ от них) – фокусом зеркала (см. рисунок 1).

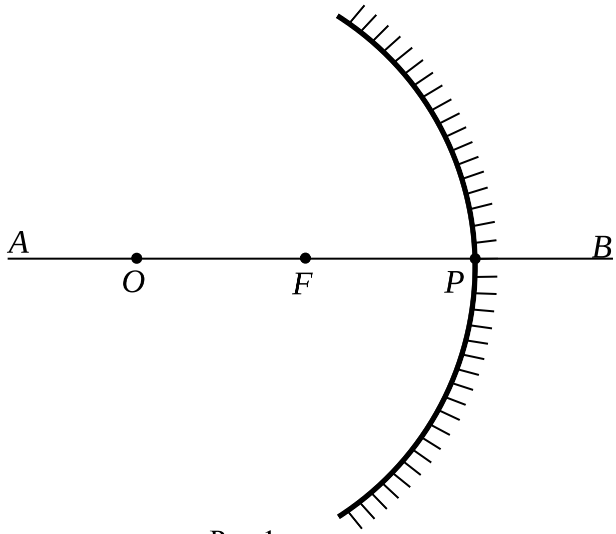


Рис.1

Давайте докажем несколько утверждений, касающихся построения хода лучей в сферическом зеркале (здесь и далее рассматриваются только лучи, падающие на зеркало под малыми углами).

1. Любой луч, проходящий через оптический центр зеркала и отражающийся от него, снова пройдет через оптический центр.
2. Любой луч, параллельный главной оптической оси зеркала, после отражения от зеркала, пройдет через его фокус.
3. Углы между главной оптической осью и лучом, падающим на полюс, и главной оптической осью и отражением этого луча одинаковы.

Пункты 1 и 3 – точные, т.е. выполняются для любых лучей, а их доказательства очевидны. Доказательство пункта 2 является следующим. Рассмотрим луч XC, параллельный главной оптической оси и падающий в точку C сферического зеркала. Тогда треугольник AFC – равнобедренный, поскольку равны углы COB и FCO ($\angle BOC = \angle XCO$ - как внутренние накрест лежащие при параллельных AB и XC и секущей OC, $\angle OCF = \angle XCO$ - как углы падения и отражения луча). Поскольку $\angle AFC = 180° - 2\alpha$, из теоремы синусов для треугольника OCF имеем

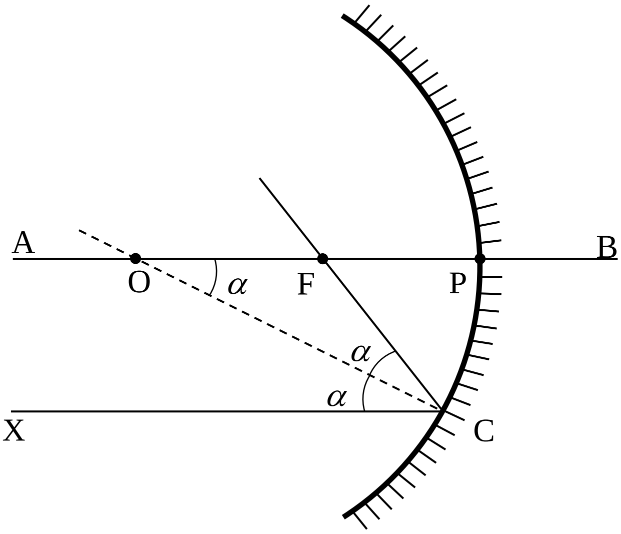


Рис. 2.

$$\frac{OC}{\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{OF}{\sin\alpha} \tag{1}$$

Используя соответствующую формулу приведения и учитывая, что углы α и 2α по условию малы, получаем из (1)

$$OF = F = \frac{R}{2} \tag{2}$$

Поскольку точка пересечения луча и главной оптической оси не зависит от угла α, в эту точку придут все лучи, параллельные главной оптической оси. Величину F в дальнейшем будем называть фокусным расстоянием зеркала.

Докажем теперь, что изображение точечного источника, лежащего на главной оптической оси зеркала на расстоянии, большем его фокусного расстояния, действительно. А изображение источника, лежащего на главной оптической оси на расстоянии, меньшем фокусного расстояния, - мнимо. Согласно указанию к задаче изображение любого точечного источника существует, поэтому достаточно найти точку пересечения любых двух лучей, вышедших из источника. Очевидно, изображение источника, лежащего на главной оптической оси, лежит на главной оптической оси. Рассмотрим луч SC, вышедший из источника. Так как для источника, находящегося от зеркала дальше фокуса, $\angle SCO < \angle FCO$, а луч FC после отражения от зеркала идет параллельно главной оптической оси, то луч SC после отражения пересечет главную оптическую ось в некоторой точке S', где и будет находиться изображение рассматриваемого точечного источника (рис. 3). А вот для источника, который находится от зеркала на расстоянии, меньшем фокусного, $\angle SCO > \angle FCO$, и отраженный луч не пересекает главную оптическую ось (так как, луч, вышедший из фокуса, отразится параллельно главной оптической оси). Поэтому в этом случае изображение источника будет мнимым, и лежать оно будет за зеркалом (см. рисунок 4).

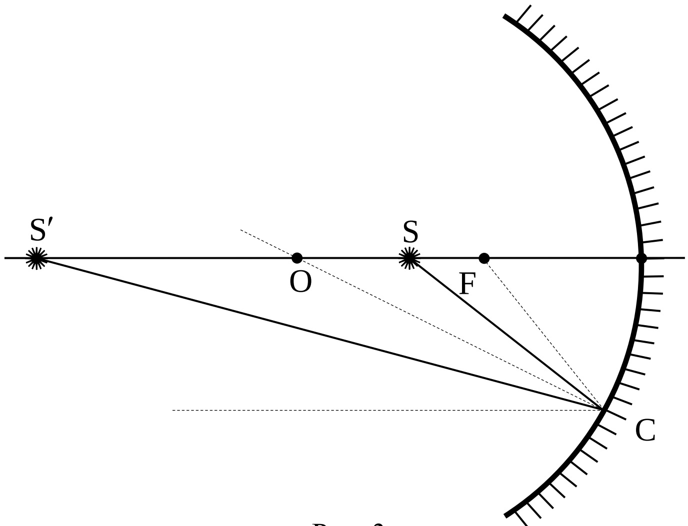


Рис. 3.

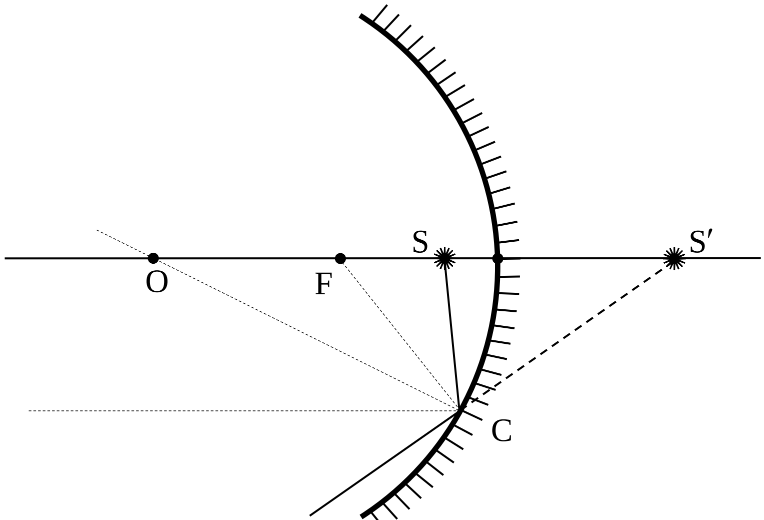


Рис. 4.

При этом очевидно, что и в том, и в другом случае зеркало перевернет изображение в направлении «право-лево» (рис. 5). А вот перево-

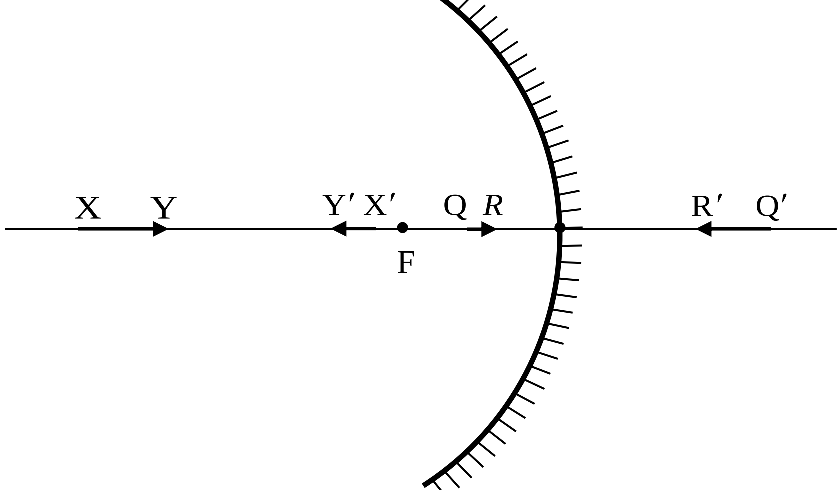


Рис. 5.

рот изображения в направлении «верх-низ» будет происходить по-разному. Изображение источника, расположенного от зеркала на расстоянии, большем фокусного, будет перевернуто в направлении «верх-низ», меньшем фокусного – не перевернуто. Это легко понять, если рассмотреть луч, падающий на полюс зеркала и учесть, что изображение первого источника будет действительным, второго – мнимым (рис. 6).

Поэтому ориентация изображения для первого и второго рассмотренных случаев (а нам в дальнейшем понадобятся оба этих случая) будет такой, как это показано на рисунке 7. В первом случае предмет (треугольник) отмечен буквой T, его изображение – буквой T'. Во втором случае предмет (сегмент) отмечен буквой C, его изображение – буквой C'.

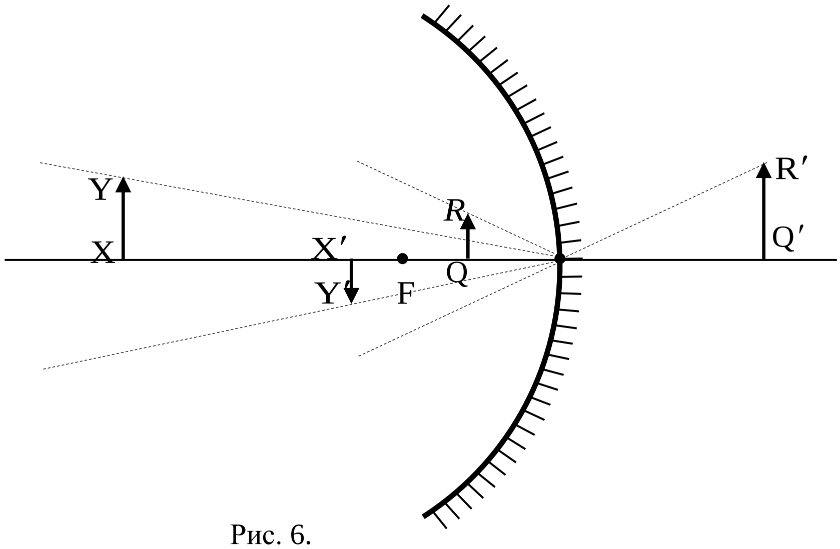


Рис. 6.

Теперь можно перейти к построению изображения лягушки в двух зеркалах. Поскольку по условию высоты зеркал равны четверти радиуса кривизны зеркал, фокус верхнего зеркала попадает на самую нижнюю точку нижнего зеркала, фокус нижнего зеркала – в середину отверстия в верхнем зеркале.

Поэтому если бы лягушка была точечной, она находилась бы точно в фокусе верхнего зеркала. Поэтому любой луч, попавший в отверстие и отразившийся от лягушки после отражения от верхнего зеркала, будет распространяться параллельно главной оптической оси зеркал. Поэтому на нижнее зеркало будет падать пучок параллельных лучей, которые после отражения от нижнего зеркала должны сойтись в его фокусе, т.е. точно в середине отверстия (рис. 8). Таким образом, все лучи, отразившиеся от лягушки, соберутся в середине отверстия, и, следовательно, в этой точке будет находиться изображение лягушки в двух зеркалах. А поскольку здесь будут сходиться сами световые лучи, это изображение будет действительным. Следовательно, оптическая иллюзия представляет собой действительное изображение лягушки.

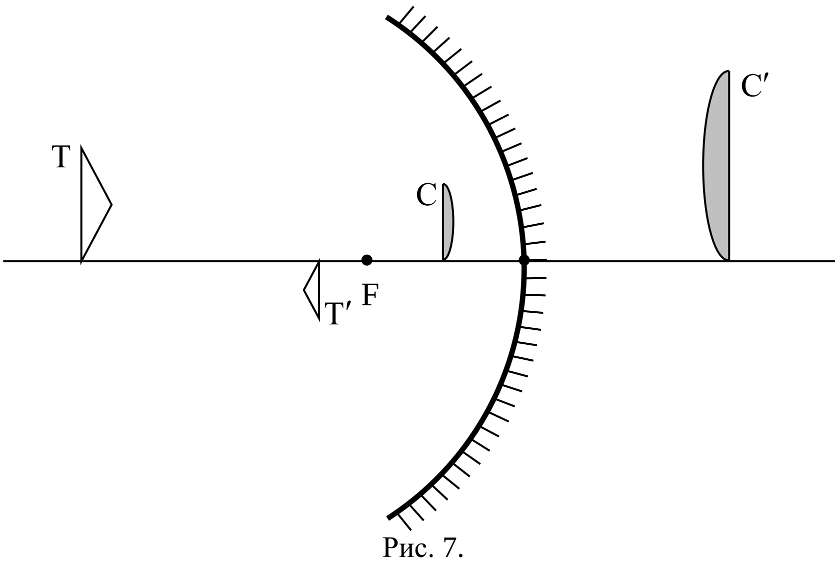


Рис. 7.

Разберем теперь вопрос об ориентации изображения лягушки. Для этого учтем, что лягушка неточечная. Тогда в рассматриваемом случае $2h = R/2$ лягушка находится ближе фокуса к верхнему зеркалу, и, следовательно, верхнее зеркало создает мнимое изображение лягушки, которое находится очень далеко за верхним зеркалом, перевернуто в направлении «верх-низ» и не перевернуто в направлении «право-лево», как это было проиллюстрировано выше (рисунок 9, левая часть, лягушка отмечена символом Л, ее изображение в верхнем зеркале - Л′). В результате на нижнее зеркало падают такие лучи, которые были как бы отражены этим изображением. А поскольку это изображение находится далеко то нижнего зеркала, оно создаст его действительное изображение (Л″ на рисунке 9), которое будет перевернуто и в направлении «верх-низ», и в направлении «право-лево» (рис. 9, правая часть).

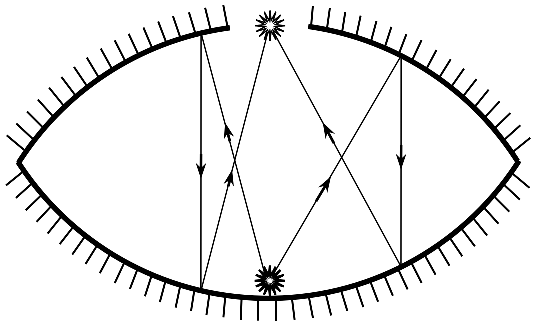


Рис. 8

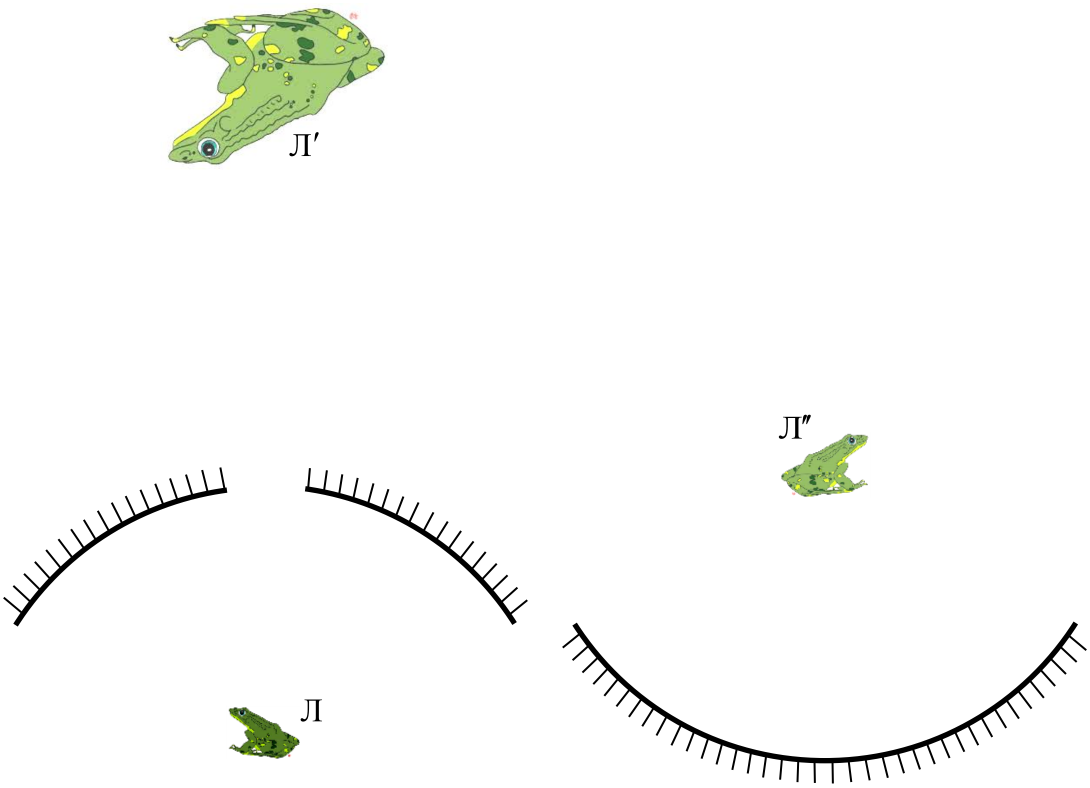


Рис. 9.

Таким образом, два зеркала создают действительное изображение лягушки, дважды перевернутое в направлении «верх-низ» (т.е. оставшееся в той же ориентации «верх-низ», что и лягушка) и перевернутое в направлении «право-лево».

Теперь давайте рассмотрим вопрос об изображении лягушки количественно. Пусть лягушка, имея высоту δ (этот размер задан в условии и равен $R/8$), имеет в поперечном направлении размер a (рисунок 10; на рисунке этим размерам отвечают отрезки AB и BF соответственно). Давайте построим изображение отрезка AB в верхнем зеркале (которое для удобства построений показано на рисунке без отверстия) и найдем размер изображения.

Для построения изображения отрезка AB возьмем такие два луча, проходящие через точку A. Это, во-первых, луч, проходящий через фокус зеркала и идущий после отражения параллельно главной оптической оси. А во-вторых, луч, падающий на полюс, который после отражения пойдет под таким же углом к главной оптической оси, что и падающий луч. Точка пересечения их продолжений (A') и будет изображением точки A.

Далее. Из подобия треугольников ABF и CDF имеем

$$\frac{a'}{a} = \frac{F}{\delta} \tag{3}$$

где a' - размер изображения в верхнем зеркале (в случае малых углов падения лучей $DF \approx F$). С другой стороны, из подобия треугольников APB и $A'PB'$

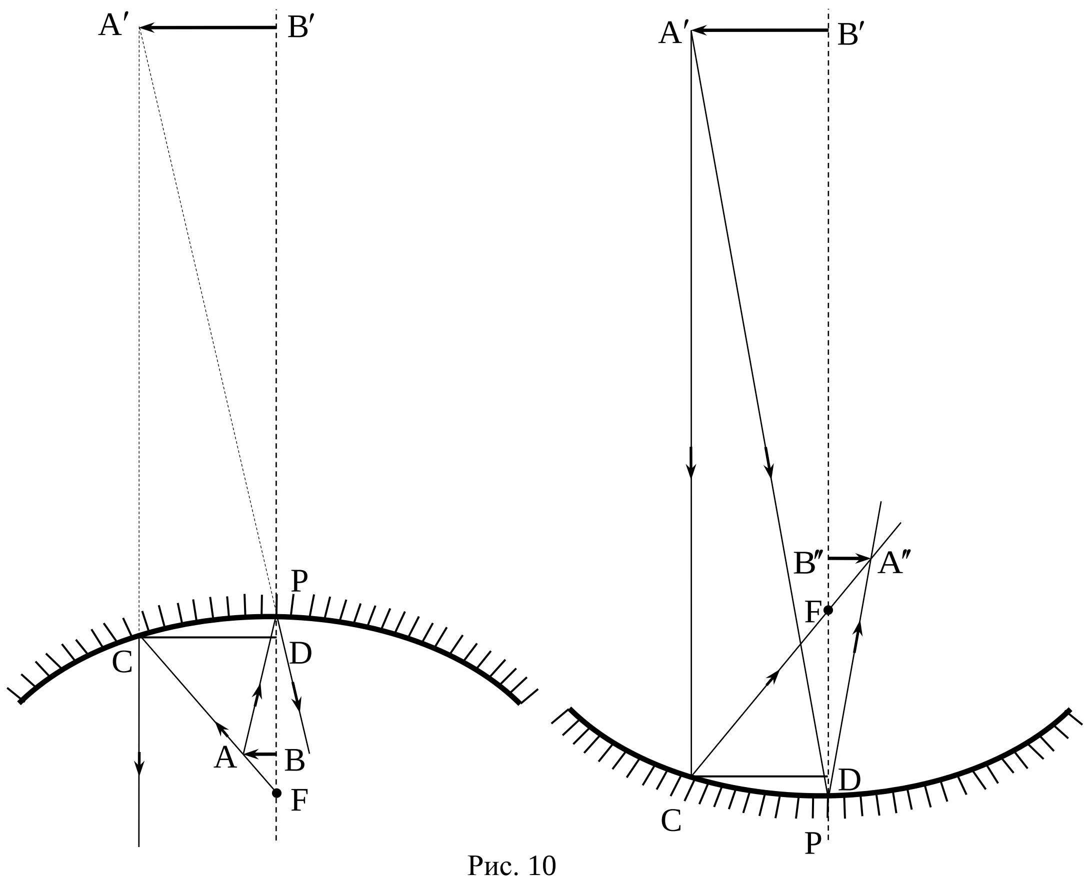


Рис. 10

$$\frac{a'}{a} = \frac{f}{F - \delta} \tag{4}$$

где $f = B'P$ - расстояние от зеркала до изображения. Из этих формул находим

$$f = \frac{F\left(F-\delta\right)}{\delta} \text{ и } a' = \frac{F}{\delta}a \tag{5}$$

Теперь построим изображение изображения лягушки в верхнем зеркале в нижнем зеркале. Луч, вышедший из точки A' и падающий на полюс нижнего зеркала отражается под тем же углом к главной оптической оси, луч, проходящий через фокус, отражается параллельно главной оптической оси. Находя точку их пересечения, получаем изображение точки A' в нижнем зеркале. В результате находим отрезок $A''B''$, являющийся изображением отрезка AB в двух зеркалах . Найдем его размеры.

Из подобия треугольников $A'PB'$ и $A''PB''$ получаем

$$\frac{a''}{a'} = \frac{f_1}{f+F} = \frac{f_1\delta}{F^2} \tag{6}$$

где f_1 - расстояние от изображения $A''B''$ до зеркала. С другой стороны, из подобия треугольников CDF и $A''FB''$ имеем

$$\frac{a''}{a'} = \frac{f_1 - F}{F} \tag{7}$$

(в формуле (7) учтено, что для малых углов падения луча на зеркало $FD \approx F$). Из формул (6)-(7) находим

$$f_1 = \frac{F^2}{F-\delta} \text{ и } \frac{a''}{a'} = \frac{\delta}{F-\delta} \tag{8}$$

а затем из второй формулы (8) и формулы (4) – увеличение лягушки в двух зеркалах

$$\frac{a''}{a} = \frac{F}{F-\delta}$$

Учитывая, что $F = R/2$, а по условию $\delta = R/8$ (где R - радиус кривизны зеркала), получим

$$\frac{a''}{a} = \frac{4}{3}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильное использование закона отражения света и нахождение фокуса сферического зеркала – 0,5 балла

2. Правильное построение изображения лягушки, рассматриваемой как точечное тело – 0,5 балла

3. Правильные построения действительного и мнимого изображений в источников в сферическом зеркале. С правильной ориентацией – 0,5 балла

4. Правильный ответ для увеличения изображения – 0,5 балла

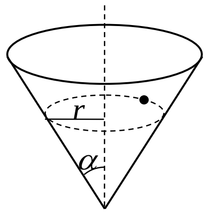
Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.

Задания, решения и критерии оценки работ очного отборочного тура Отраслевой физико-математической олимпиады школьников Росатом и Инженерной олимпиады школьников
11 класс, 2022-2023 учебный год

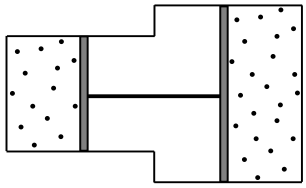
1 вариант

1. Небольшое тело движется по внутренней поверхности вертикального конуса, описывая горизонтальную окружность радиуса r с центром на оси конуса (см. рисунок). Найти угловую скорость тела, если угол между осью конуса и его образующей равен α. Поверхность конуса гладкая, влиянием силы сопротивления воздуха пренебречь.

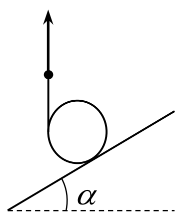


2. К поплавку массой m привязана леска с грузом. При этом поплавок погружен в воду на третью часть своего объема. Найти силу натяжения лески, если свободно плавающий поплавок погружен в воду на пятую часть своего объема.

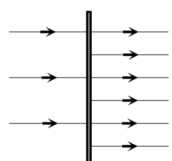
3. Сосуд образован двумя спаянными цилиндрическими трубами одинковой длины с площадями сечения S и $2S$. В сосуд вставили тонкие поршни, связанные несжимаемым стержнем, длина которого равна половине длины сосуда, и воздух из просранства между поршнямиа откачали. После этого трубы запаяли снаружи, оставив между поршнями и стенками сосуда какое-то количесвтво газа (см. рисунок). Известно, что когда температуры газов снаружи от поршней одинаковы, поржни располагаются на одинаковых расстояниях от стыка труб. Когда абсолютную температуру газа в левом отсеке изменили до некоторого значения T_1, а газа в правом отсеке - до некоторого значения T_2, поршни сместились вправо на половину расстояния от поршней до стыка труб в начальном иоложении. Найти отношение T_1/T_2.



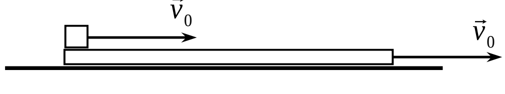
4. На массивную трубу намотали нить. Затем трубу положили на шероховатую наклонную плоскость с углом наклона α так, что ось трубы параллельна основанию плоскости. Трубу удерживают в покое, прикладывая к концу нити силу, направленную вертикально вверх (см. рисунок). При каком коэффициенте трения между трубой и плоскостью возможно такое равновесие?



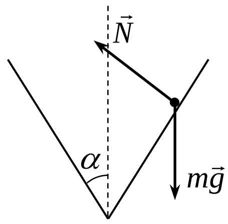
5. Тонкую равномерно заряженную диэлектрическую пластинку с площадью S внесли в однородное внешнее электрическое поле и расположили перпендикулярно силовым линиям этого поля. В результате с одной стороны от пластинки установилось электрическое поле с напряженностью E, с другой – с напряженностью $2E$ (см. рисунок). Найти заряд пластинки и напряженность внешнего электрического поля.



6. Точечное тело положили на край доски и сообщили ему и доске одинаковые скорости v_0 (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и доской равен μ, между доской и поверхностью - 2μ. Известно, что массы тела и доски одинаковы, и что тело в процессе движения не соскальзывает с доски. Найти перемещение тела относительно доски.



Решения и критерии оценивания



1. Поскольку поверхность конуса гладкая, и тело движется на одной и той же высоте, его скорость не меняется. На тело действуют – сила реакции опоры, и сила тяжести. И выполнен закон вращательного движения – сумма этих сил в каждой точке направлена к центру окружности, по которой движется тело, и равна $m\omega^2 r$, где m - масса тела, ω - угловая скорость. Поэтому проекции второго закона Ньютона на вертикальную ось и ось, направленную к центру окружности, по которой движется тело, дает

$$0 = N\sin\alpha - mg$$
$$m\omega^2 r = N\cos\alpha$$

Отсюда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{ctg}\alpha}{r}}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильное уравнение второго закона Ньютона для вращательного движения – 0,5 балла.
2. правильные силы – 0,5 балла.
3. правильные проекции векторных уравнений на вертикальную и горизонтальную оси – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла.

2. Поскольку сила Архимеда определяется объемом погруженной в воду части поплавка, условия его плавания в воде первом и втором случаях дают

$$mg + T = (1/3)\rho g V$$
$$mg = (1/5)\rho g V$$

где ρ - плотность воды, V - объем поплавка. Выражая из второй формулы величину $\rho g V$ и подставляя ее в первую формулу найдем

$$T = \frac{2}{3}mg$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. правильное выражение для силы Архимеда - 0,5 балла
2. правильное условие плавания поплавка с грузом – 0,5 балла
3. правильное условие плавания свободного поплавка – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла

3. Рассмотрим условие равновесия тела, представляющего собой два поршня, связанных стержнем. Поскольку газа между поршнями нет, на это тело действуют две силы - со стороны газа в левом и правом отсеках сосуда. Поэтому

$$p_1 S = p_2 2S \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = 2p_2 \qquad (1)$$

где p_1 и p_2 - давления газа в левом и правом отсеках сосуда соответственно. С другой стороны, согласно уравнению Клапейрона-Менделеева имеем для газов в левом и правом отсеках сосуда

$$p_1(l/2)S = \nu_1 RT, \qquad p_2(l/2)2S = \nu_2 RT \tag{2}$$

где l - длина каждой из двух труб, ν_1 и ν_2 - количество вещества газа в левом и правом отсеках сосуда соответственно, T - температура газа в отсеках, которая по условию является одинаковой. Поскольку поршни сдвинулись при этом вправо на $l/4$, объемы левого и правого отсеков сосуда стали равны $V_1 = 3lS/4$ и $V_2 = lS/2$ соответственно. Поэтому из уравнения Клапейрона-Менделеева получим для новых давлений p_1' и p_2' в левом и правом отсеках

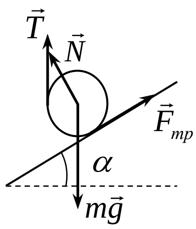
$$p_1' = \frac{4\nu RT_1}{3lS}, \qquad p_2' = \frac{2\nu RT_2}{lS}$$

Деля эти уравнения друг на друга и учитывая, что в равновесии соотношение давлений газа в левом и правом отсеках сосуда по-прежнему такое же, как в (1) $p_1' = 2p_2'$, получаем

$$\frac{T_1}{T_2} = 3$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. правильное условие равновесия поршней в начальном случае - 0,5 балла
2. правильный закон Клапейрона-Менделеева для газов – 0,5 балла
3. правильное условие равновесия поршней во втором случае – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла

4. На трубу действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции плоскости $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная вверх вдоль плоскости (см. рисунок). Чтобы труба находилась в равновесии сумма сил и сумма моментов сил, действующих на трубу, должна равняться нулю. Условие моментов относительно центра трубы дает



$$TR = F_{тр}R$$

где T - сила натяжения каната, $F_{тр}$ - сила трения, действующая на трубу со стороны плоскости. Откуда находим, что

$$T = F_{тр}$$

С другой стороны, из условия моментов относительно точки касания трубы и плоскости имеем

$$T\left(R + R\sin\alpha\right) = mgR\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

Поэтому

$$F_{тр} = \frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

и условие покоя трубы имеет вид

$$F_{mp} \le F_{mp}^{\max} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \le \mu N$$

Находя силу реакции плоскости из уравнения сил

$$N = mg\cos\alpha - T\cos\alpha = mg\cos\alpha - \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{mg\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$

получим условие покоя трубы

$$\frac{mg\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \le \frac{\mu mg\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \mu \ge \mathrm{tg}\,\alpha$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. правильно расставлены силы, действующие на трубу - 0,5 балла
2. правильные условия равновесия трубы – 0,5 балла
3. правильное условие начала сдвига трубы – достижение силой трения максимального значения – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла

5. Пусть заряд пластинки равен Q, напряженность внешнего электрического поля - E_0. Согласно принципу суперпозиции напряженность электрического поля равна векторной сумме внешнего поля $\vec{E}_0$ и собственного поля пластинки, которое слева и справа от пластинки направлено противоположно. Поэтому из данных в рисунке в условии задачи направлений и величин суммарных полей слева и справа от пластинки заключаем, что напряженность внешнего электрического поля направлена направо, больше напряженности собственного поля пластинки, которая справа от пластинки направлена направо, слева – налево, заряд пластинки положительный. Поэтому для заданных в условии полей имеем

$$E = E_0 - \frac{Q}{2S\varepsilon_0}$$

$$2E = E_0 + \frac{Q}{2S\varepsilon_0}$$

где S - площадь пластинки, ε_0 - электрическая постоянная. Складывая и вычитая эти уравнения, получим

$$E_0 = \frac{3}{2}E \text{, направлена направо}$$

$$Q = \varepsilon_0 SE > 0$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильная формула для напряженности электрического поля равномерно заряженной пластинки - 0,5 балла.
2. правильный закон сохранения электрического заряда – 0,5 балла.
3. правильные уравнения для напряженности электрического поля с двух сторон от пластинки – 0,5 балла
4. правильный ответ (величина заряда и знак) – 0,5 балла.

6. В первый момент времени скорости тела и доски одинаковы, но на доску действует тормозящая сила трения со стороны поверхности. Это приведет к тому, что тело начнет скользить по доске. Действительно, если бы скольжения тела по доске не было, его ускорение совпадало бы с ускорением доски и было бы равно

$$a = \frac{F_{mp,1}}{2m} = \frac{2\mu N_1}{2m} = 2\mu g \qquad (3)$$

где $F_{mp,1} = 2\mu N_1$ - сила трения между телом и горизонтальной поверхностью, $N_1 = 2mg$ сила реакции между доской и поверхностью. С другой стороны, для тела это торможение может создаваться только силой трения $F_{mp,2}$, которая действует на него со стороны доски и которая не может превосходить величины $F_{mp,2} \le \mu N_2 = \mu mg$, где $N_2 = mg$ - сила реакции между телом и доской. Следовательно, ускорение тела не может быть больше, чем μg. Это значит, что доска будет тормозить сильнее, чем тормозит тело, поэтому тело будет проскальзывать по доске вперед, обгоняя ее. Другими словами, картина движения тел выглядит так: и тело, и доска замедляются, но доска сильнее. Поэтому доска остановится раньше, чем остановится тело, которое еще какое-то время продолжит движение по доске.

Для нахождения перемещения тела относительно доски найдем перемещение доски и тела относительно земли, а потом их разность. Для этого найдем ускорения тел и воспользуемся законами равноускоренного движения.

В горизонтальном направлении на тела действуют следующие силы:
на тело – тормозящая сила трения $F_{mp,2} = \mu N_2 = \mu mg$ со стороны доски ($N_2 = mg$ - сила реакции между телом и доской),
на доску – разгоняющая сила трения со стороны тела $F_{mp,2} = \mu mg$ и тормозящая сила трения $F_{mp,1} = 2\mu N_1 = 4\mu mg$ ($N_1 = 2mg$ - сила реакции между телом и доской).

Поэтому из второго закона Ньютона для доски и тела

$$ma_1 = F_{mp,1} - F_{mp,2}$$
$$ma_2 = F_{mp,2}$$

(a_1 - ускорение доски, a_2 - ускорение тела) находим

$$a_1 = 3\mu g, \qquad a_2 = \mu g$$

Теперь из закона равноускоренного движения для скорости $v(t) = v_0 - at$ находим времена t_1 и t_2 остановки доски и тела соответственно

$$t_1 = \frac{v_0}{3\mu g}, \qquad t_2 = \frac{v_0}{\mu g}.$$

а из закона для координаты $x(t) = v_0 t - at^2/2$ - расстояния, пройденные доской и телом S_1 и S_2:

$$S_1 = x_1(t_1) = \frac{v_0^2}{6\mu g}, \qquad S_2 = x_2(t_2) = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

Отсюда находим перемещение тело относительно доски

$$l = S_2 - S_1 = \frac{v_0^2}{3\mu g}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильный вывод, что тело скользит относительно доски и что доска остановится раньше тела - 0,5 балла.
2. правильные ускорения тела и доски – 0,5 балла.
3. правильные уравнения равноускоренного движения для тела и доски (или законы сохранения энергии с правильными работами) – 0,5 балла
4. правильный ответ для перемещения тела относительно доски – 0,5 балла.

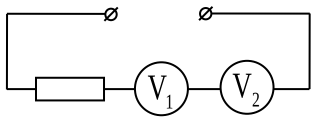
Оценка работы
Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.
2 вариант (критерии оценки задач такие же как в варианте 1)

1. та же задача, что и в варианте 1. **2.** $T = \frac{1}{2}mg$, **3.** $\frac{T_1}{T_2} = 3$ (от площади поршней это отношение не зависит, поэтому ответ получился такой же, как и в первом варианте). **4.** $\mu \geq \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = tg(\alpha/2)$.

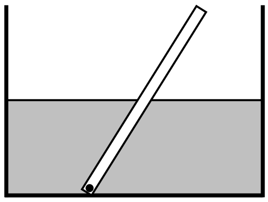
5. $E_0 = \frac{1}{2}E$, направлена направо, $Q = 3\varepsilon_0 SE > 0$. **6.** $l = \frac{2v_0^2}{5\mu g}$

Задания, решения и критерии оценки работ очного отборочного тура Отраслевой физико-математической олимпиады школьников Росатом и Инженерной олимпиады школьников
11 класс, 2022-2023 учебный год

1 вариант

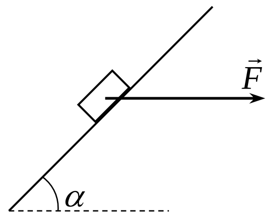


1. Резистор и два вольтметра соединили так, как показано на рисунке, и подключили к этой цепи источник постоянного напряжения. Известно, что вольтметр V_1 показал при этом напряжение U, а вольтметр V_2 - напряжение $3U/2$. Когда из цепи убрали вольтметр V_2 (сохранив резистор и вольтметр V_1 последовательно подключенными к источнику), вольтметр V_1 показал напряжение $3U/2$. Какое напряжение покажет вольтметр V_2, если из цепи убрали вольтметр V_1, сохранив последовательно подключенными к источнику тот же резистор и вольтметр V_2?



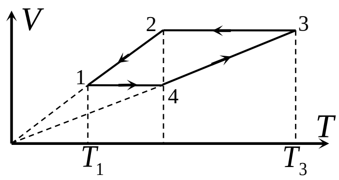
2. На дно узкой пробирки длиной l и площадью поперечного сечения S положили массивное точечное тело и опустили пробирку в неглубокий сосуд с водой. В результате дно пробирки легло на дно сосуда, ее половина оказалась в воде, половина – над водой (см. рисунок). Найти массу пустой пробирки. Плотность воды ρ.

3. Тело массой m налетает на покоящееся тело с неизвестной массой и после абсолютно упругого удара движется в перпендикулярном направлении со скоростью, составляющей половину начальной. Найти массу второго тела.



4. На шероховатую наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, аккуратно кладут шероховатое тело массой m, и оно начинает двигаться с некоторым ускорением. Если к телу приложить силу $\vec{F}$ величиной $3mg$, направленную горизонтально (см. рисунок), оно будет двигаться с таким же ускорением, но направленным вверх вдоль плоскости. Найти коэффициент трения между телом и плоскостью.

5. Два точечных заряда q и $-2q$ с массами $3m$ и m соответственно удерживают в вакууме на расстоянии l друг от друга. В некоторый момент времени заряды одновременно отпускают, и благодаря кулоновскому притяжению они начинают двигаться навстречу друг другу. Найти скорости зарядов в тот момент времени, когда расстояние между ними уменьшится вдвое.



6. С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс. График зависимости объема газа от его абсолютной температуры в этом процессе представлен на рисунке. Известны абсолютные температуры газа в состояниях 1 и 3 - $T_1 = T$ и $T_3 = 4T$. Известно также, что температуры газа в состояниях 2 и 4 одинаковы. Найти термодинамический КПД цикла.

Решения и критерии оценивания

1. При данном в условии подключении ток через вольтметры одинаков, поэтому их сопротивления отличатся в полтора раза:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{2}$$

Поскольку при удалении вольтметра V_2 показания вольтметра V_1 увеличились в полтора раза, то в полтора раза увеличился при этом и ток в цепи. Поэтому

$$\frac{U}{r + R_1 + \frac{3}{2}R_1} = \frac{2}{3}\frac{U}{r + R_1}$$

где U - напряжение источника, r - сопротивление резистора. Отсюда находим сопротивление резистора $r = 2R_1$ и ток при первоначальном подключении

$$I = \frac{U}{r + R_1 + \frac{3}{2}R_1} = \frac{2U}{9R_1}$$

Если мы оставим в цепи резистор и вольтметр V_2, то ток в цепи будет равен

$$I_2 = \frac{U}{r + R_2} = \frac{U}{2R_1 + \frac{3}{2}R_1} = \frac{2U}{7R_1}$$

т.е. увеличится в 9/7 раза по сравнению с первым подключением. Следовательно, и показания вольтметра V_2 увеличатся в 9/7 раз по сравнению с первым случаем, т.е. составят

$$U_2 = \frac{9}{7}\frac{3}{2}U = \frac{27}{14}U$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Правильное использование закона Ома для участка цепи и для замкнутой цепи - 0,5 балла
2. правильное соотношение между сопротивлениями вольтметров – 0,5 балла
3. правильное соотношение сопротивлений резистора и вольтметра – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла

2. На пробирку действуют – сила тяжести, сила реакции дна сосуда, сила со стороны точечного тела, равная его силе тяжести, и сила Архимеда. При этом сила тяжести приложена к центру тяжести пробирки, т.е. посередине пробирки. Сила Архимеда приложена к центру тяжести погруженной в воду части пробирки, т.е. к точке, находящейся на расстоянии четверти длины пробирки от ее дна (поскольку по условию пробирка погружена в воду на половину длины). Поэтому уравнение моментов относительно нижней точки пробирки дает

$$mg\frac{l}{2} = F_A\frac{l}{4}$$

где m - масса пустой пробирки. Отсюда находим

$$F_A = 2mg$$

С другой стороны, силу Архимеда можно найти через плотность воды, и объем погруженной в воду части пробирки

$$F_A = \rho g S \frac{l}{2}$$

Отсюда

$$m = \frac{1}{4}\rho l S$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные выражения (значение и точка приложения) для силы Архимеда - 0,5 балла.
2. Правильное условие моментов для пробирки – 0,5 балла.
3. Правильно найдено значение силы Архимеда, действующей на пробирку – 0,5 балла
4. Правильный ответ для массы пустой пробирки – 0,5 балла.

3. Пусть начальная скорость тела массой m равна v. Тогда закон сохранения импульса в проекциях на ось x, направленную вдоль начальной скорости первого тела, и перпендикулярную ось y дает

$$mv = MV_x$$
$$0 = MV_y - m(v/2)$$

где M - масса второго тела, V_x и V_y - проекции скорости второго тела на оси x и y. Здесь использовано, что первое тело после столкновения движется в перпендикулярном направлении с половинной скоростью.

Поскольку столкновение абсолютно упругое, сохраняется энергия системы. Имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{M\left(V_x^2 + V_y^2\right)}{2} + \frac{mv^2}{8}$$

Выражая из закона сохранения импульса проекции скорости второго тела и подставляя их в закон сохранения энергии, найдем

$$M = \frac{5}{3}m$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильный закон сохранения импульса для столкновения - 0,5 балла.
2. правильные проекции закона сохранения импульса – 0,5 балла.
3. правильный закон сохранения энергии – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла.

4. В первом случае на тело действуют: сила тяжести mg, сила реакции $N = mg\cos\alpha$ и сила трения $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Ускорение тела находим из второго закона Ньютона

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) = \frac{g\left(1-\mu\right)}{\sqrt{2}}$$

(здесь учтено, что угол наклона плоскости составляет $\alpha = 45°$).

Во втором случае к перечисленным силам добавляется еще и внешняя сила $F = 3mg$, сила трения меняет направление, поскольку тело движется вверх вдоль плоскости, и увеличивается сила реакции

$$N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha = \frac{4mg}{\sqrt{2}}$$

Ускорение тела во втором случае находим из второго закона Ньютона

$$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu M$$

Имеем

$$a = \frac{2g\left(1-2\mu\right)}{\sqrt{2}}$$

Поскольку ускорения тела в первом и втором случаях одинаковы, получаем

$$\frac{g\left(1-\mu\right)}{\sqrt{2}} = \frac{2g\left(1-2\mu\right)}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \frac{1}{3}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильный второй закон Ньютона для движения тела вниз - 0,5 балла.
2. правильный второй закон Ньютона для движения вверх при действии дополнительной внешней силы, направленной параллельно земле – 0,5 балла.
3. правильное уравнение для коэффициента трения – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла.

5. Два точечных заряда q и $-2q$ с массами $3m$ и m соответственно удерживают в вакууме на расстоянии l друг от друга. В некоторый момент времени заряды одновременно отпускают, и благодаря кулоновскому притяжению они начинают двигаться навстречу друг другу. Найти скорости зарядов в тот момент времени, когда расстояние между ними уменьшится вдвое.

5. После того как заряды отпускают, система становится замкнутой, и для нее справедливы законы сохранения импульса и энергии. Поэтому для скоростей зарядов в тот момент времени, когда расстояние между ними уменьшилось в два раза, имеем

$$\begin{aligned} &3mv_1 = mv_2 \\ &\frac{3mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - k\frac{2q^2}{l/2} = -k\frac{2q^2}{l} \end{aligned} \qquad (*)$$

где v_1 и v_2 - скорости зарядов с массами $3m$ и m соответственно, k - коэффициент пропорциональности в законе Кулона. Здесь учтено, что энергия U взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, определяется соотношением

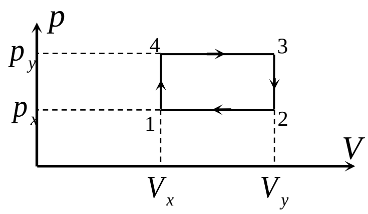
$$U = k\frac{q_1 q_2}{r}$$

Из системы уравнений (*) находим

$$v_1 = \sqrt{\frac{kq^2}{3ml}}\ ,\ v_1 = 3v_1 = \sqrt{\frac{3kq^2}{ml}}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильный закон сохранения импульса для движения зарядов - 0,5 балла.
2. правильный закон сохранения энергии для системы зарядов – 0,5 балла.
3. правильная система уравнений для скоростей – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла.

6. Построим график процесса в координатах $p-V$. Процесс 1-2 – изобарический с ростом объема, процесс 2-3 – изохорический с ростом температуры и, следовательно, давления, процесс 3-4 – изобарический с понижением объема, процесс 4-1 – изохорический с понижением температуры, и, следовательно, давления. Цикл в координатах $p-V$ показан на рисунке.



Найдем давления и объемы газа в состояниях 1, 2, 3 и 4. Поскольку процессы 1-4 и 3-2 – изохорические, для них справедливы соотношения

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{T_4}{T_1} \text{ и } \frac{p_y}{p_x} = \frac{T_3}{T_2}$$

где p_x - давление в состояниях 1 и 2, p_y - давление в состояниях 3 и 4, T_1, T_2, T_3 и T_4 - температуры газа в состояниях 1, 2, 3 и 4 соответственно. Поскольку $T_2 = T_4$, из этих формул получаем

$$T_2 = T_4 = \sqrt{T_1 T_3} = 2T$$

Следовательно, также в 2 раза отличаются давления p_x и p_y, а также объемы V_x и V_y газа в состояниях 1, 4 и 2, 3 (см. рисунок). Поэтому работа газа за цикл 1-4-3-2-1 (равная площади цикла) равна

$$A_{1-2-3-4-1} = \left(p_y - p_x\right)\left(V_y - V_x\right) = p_x V_x. \tag{*}$$

Количество теплоты, полученное газом в процессе 1-4-3, в котором газ контактирует с нагревателем и получает тепло, найдем по первому закону термодинамики. Применяя этот закон к процессу 1-4-3, получим (с использованием закона Клапейрона-Менделеева)

$$Q_{1-4-3} = \Delta U_{1-4-3} + A_{1-4-3} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_3 - T_1\right) + p_y\left(V_y - V_x\right) = \frac{9}{2} p_x V_x + 2 p_x V_x = \frac{13}{2} p_x V_x \tag{**}$$

где ΔU_{1-4-3} - изменение внутренней энергии газа в процессе 1-4-3, A_{1-4-3} - работа газа в процессе 1-4-3. Отсюда по формуле

$$\eta = \frac{A}{Q}$$

где A - работа газа за цикл, Q - количество теплоты, полученное в течение цикла от нагревателя, находим термодинамический КПД заданного цикла

$$\eta = \frac{A_{1-4-3-2-1}}{Q_{1-4-3}} = \frac{2}{13}$$

Эта формула показывает, что на каждый джоуль совершенной работы, мы забираем у нагревателя 6,5 джоулей тепла.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. правильное перестроение графика в координаты «давление-объем» - 0,5 балла.
2. правильные соотношения температур между состояниями 1, 2, 3 и 4 – 0,5 балла.
3. правильная работа за цикл и количество теплоты, полученное газом – 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.
2 вариант (критерии оценки задач такие же как в варианте 1)

1. $U_2 = \frac{8}{3}U$, **2.** $m = \frac{4}{9}\rho l S$, **3.** $M = \frac{5}{4}m$, **4.** $\mu = \frac{1}{2}$ **5.** $v_1 = \sqrt{\frac{kq^2}{5ml}}$, $v_2 = 4\sqrt{\frac{kq^2}{5ml}}$ **6.** $\eta = \frac{2}{9}$