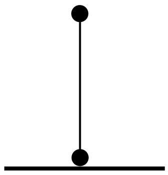
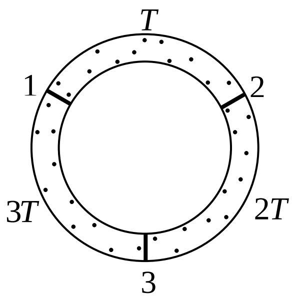
Решения и критерии оценивания решений задач
Заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике,
2023-2024 учебный год, 11 класс, Москва

1. Когда к источнику электрической энергии подключили первый резистор, КПД источника составил $\eta_1 = 0{,}8$. Когда к тому же источнику подключили второй резистор, КПД источника составил $\eta_2 = (3/4)\eta_1$. Каким будет КПД источника, если к нему подключить оба резистора, соединенных параллельно? КПД источника электрической энергии называется отношение количества теплоты, выделяющейся во внешней цепи, к полному количеству теплоты, выделяющейся в цепи.

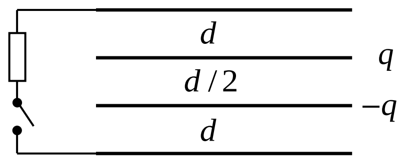
2. Два одинаковых маленьких массивных шарика прикреплены к жесткому невесомому стержню длиной l. Стержень ставят вертикально на гладкую горизонтальную поверхность (см. рисунок), а потом отпускают. Найти ускорение центра стержня в тот момент времени, когда скорость нижнего шарика будет максимальна.

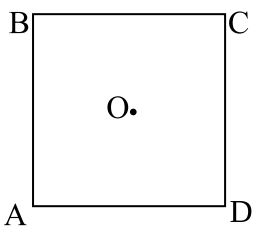


3. Имеется закрытый сосуд в форме тора – замкнутой кольцевой цилиндрической трубки. Сосуд разделили на три отсека тремя подвижными поршнями 1, 2 и 3 и расположили на горизонтальном столе (см. рисунок; вид сверху). В сосуде содержатся ν молей одноатомного идеального газа (в сумме во всех отсеках). В начальном состоянии объемы отсеков сосуда одинаковы, температуры газа равны T, $2T$ и $3T$ (показаны на рисунке), а поршни находятся в равновесии. Считая, что поршень 1 тепло не проводит, найти, сколько тепла пройдет через поршни 2 и 3 при установлении теплового равновесия. Потерями тепла в окружающее пространство пренебречь.



4. Четыре одинаковых металлических пластинки расположены параллельно друг другу на расстояниях d, $d/2$ и d друг от друга. Две средние пластинки зарядили зарядами q и $-q$, крайние (незаряженные) пластинки соединили проводником через резистор и ключ (см. рисунок). Какой заряд пройдет через резистор к верхней пластинке на рисунке, и какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа в процессе установления равновесия? Площадь пластинок S. Размеры пластинок много больше расстояния между ними.





5. Квадратная пластинка ABCD со стороной l движется так, что она все время остается в одной плоскости. Известно, что в некоторый момент времени ускорения вершин A, B и C соответственно равны: $a_A = a$, $a_B = 5a/4$, $a_C = a$. Найти ускорение вершины D.

Решения и критерии оценивания решений задач

1. Пусть ЭДС и внутреннее сопротивление источника равны ε и r, сопротивление первого резистора равно R_1. Тогда по закону Ома для замкнутой цепи имеем

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}$$

По закону Джоуля-Ленца находим мощности P и P_1, которые выделяются во всей цепи и на внешнем резисторе, а также КПД источника

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R_1 + r}, \quad P_1 = \frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1 + r)^2}, \ \eta_1 = \frac{P_1}{P} = \frac{R_1}{R_1 + r}$$

Аналогично для второго подключения

$$\eta_2 = \frac{R_2}{R_2 + r}$$

Из этих формул находим

$$R_1 = \frac{r\eta_1}{1-\eta_1}, \ R_2 = \frac{r\eta_2}{1-\eta_2}$$

Когда резисторы соединяют параллельно, их сопротивление равно

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{r\eta_1\eta_2}{\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_1\eta_2}$$

Теперь находим КПД источника, подключенного к двум резисторам, соединенным параллельно

$$\eta = \frac{R}{R + r} = \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}$$

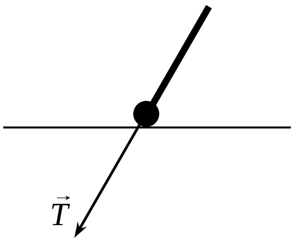
А поскольку $\eta_2 = (3/4)\eta_1$, получаем

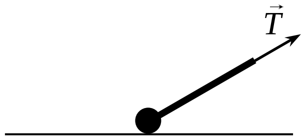
$$\eta = \frac{3\eta_1}{7 - 3\eta_1} = 0,522$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное использование законов Ома и Джоуля-Ленца – 1 балл
2. Правильно найдены сопротивления резисторов через КПД первой и второй цепи – 1 балл
3. Правильно найдено сопротивление цепи в случае параллельно соединенных резисторов – 1 балл
4. Правильное уравнение для КПД третьей цепи – 1 балл
5. Правильный ответ (формула и число) – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Поскольку центр масс системы шариков движется вертикально вниз (нет горизонтальных внешних сил, действующих на тела системы), скорость нижнего шарика в момент падения стержня на землю будет равна нулю. Следовательно, нижний шарик в процессе падения стержня на землю будет сначала разгоняться, а потом тормозить. И, следовательно, в какой-то момент времени его скорость будет максимальной.

Найти тот момент, когда скорость нижнего шарика будет максимальна, можно через силу натяжения стержня. В начале движения шариков стержень будет сжат и будет действовать на нижний шарик с силой, направленной вниз, разгоняя его (см. левый рисунок). Ближе к концу движения из-за увеличения скорости верхнего шарика сила натяжения стержня сменит свое направление, и будет уже тормозить нижний шарик (см. правый рисунок). Значит, скорость нижнего шарика будет максимальна в тот момент времени, когда сила натяжения стержня будет равна нулю. Но в тот момент времени, когда сила натяжения стержня равна нулю, на верхний шарик действует только сила тяжести. Следовательно, ускорение верхнего шарика в этот момент равно $\vec{g}$. А поскольку центр стержня совпадает с центром масс системы шариков, его ускорение можно найти как ускорение центра масс





$$\vec{a}_c = \frac{m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2}{2m}$$

где a_1 и a_2 - ускорения шариков. А поскольку ускорение нижнего шарика в рассматриваемый момент равно нулю, верхнего $\vec{g}$, из этой формулы находим ускорение середины стержня

$$\vec{a} = \vec{a}_c = \frac{1}{2}\vec{g}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная идея решения: когда скорость нижнего шарика максимальна, его ускорение равно нулю, и, следовательно, сила натяжения стержня в этот момент равна нулю – 2 балла
2. Правильный вывод, что ускорение верхнего шарика равно ускорению свободного падения – 1 балл
3. Использована формула для ускорения центра масс – 1 балл
4. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Поскольку поршни находятся в равновесии, то давления в каждом отсеке сосуда одинаковы. А поскольку одинаковыми являются и объемы, отсеков, то закон Клапейрона-Менделеева для газов в отсеках дает

$$pV = \nu_1 RT\ ,\ pV = \nu_2 R2T\ ,\ pV = \nu_3 R3T$$

где p - давление газа в сосуде (одинаковое во всех отсеках), V - объем каждого отсека, ν_1, ν_2 и ν_3 - количества вещества газа в первом, втором и третьем отсеках (где температура равнялась T, $2T$ и $3T$ соответственно). Из этих соотношений находим

$$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = 6 : 3 : 2$$

А поскольку $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \nu$, то

$$\nu_1 = \frac{6}{11}\nu, \qquad \nu_2 = \frac{3}{11}\nu, \qquad \nu_3 = \frac{2}{11}\nu,$$

Поскольку потерь энергии в окружающее пространство нет, и газы не совершают работы над внешними телами, суммарная внутренняя энергия газов при теплообмене не изменится. Поэтому результирующая температура в сосуде T_0 может быть следующим образом найдена из закона сохранения энергии

$$\frac{3}{2}\nu_1 RT + \frac{3}{2}\nu_2 R2T + \frac{3}{2}\nu_3 R3T = \frac{9}{2}pV = \frac{3}{2}\nu RT_0$$

Отсюда

$$T_0 = \frac{18}{11}T$$

Кроме того, из закона сохранения энергии можно доказать, что давление в сосуде не менялось в течение всего процесса. Действительно, поскольку в течение всего процесса поршни находятся в равновесии, то давления газа в отсеках одинаковы, и энергия газов в сосуде в любой момент времени может быть записана в виде

$$U = \frac{3}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{3}{2}\nu_2 RT_2 + \frac{3}{2}\nu_3 RT_3 = \frac{3}{2}p_1V_1 + \frac{3}{2}p_1V_2 + \frac{3}{2}p_1V_3 = \frac{9}{2}p_1V$$

А поскольку энергия не уходила из системы, заключаем, что $p_1 = p$, т.е. давление не менялось в течение всего процесса, и все процессы с газами были изобарическими.

Теперь легко найти количества теплоты, прошедшие через поршни 2 и 3. Газ, находившийся в первом отсеке (и имевший температуру T, получает тепло только через поршень 2 и нагревается в изобарическом процессе до температуры $18T/11$. Но количество теплоты, полученное одноатомным идеальным газом в изобарическом процессе составляет 5/3 от изменения его внутренней энергии. Поэтому количество теплоты, прошедшее через поршень 2 в направлении того отсека, температура которого в начале процесса была T, есть

$$Q_2 = \frac{5}{3}\Delta U_1 = \frac{5}{3}\frac{3}{2}\frac{6}{11}\nu R\left(\frac{18}{11}T - T\right) = \frac{15\cdot 7}{11^2}\nu RT = \frac{105}{121}\nu RT = 0,87\nu RT$$

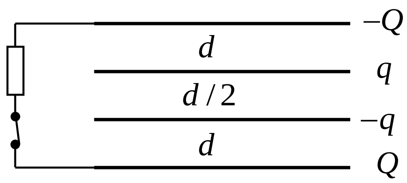
Количество теплоты, прошедшее через поршень 3 в направлении того отсека, температура которого в начале процесса была $2T$, есть

$$Q_3 = -\frac{5}{3}\Delta U_3 = -\frac{5}{3}\frac{3}{2}\frac{2}{11}\nu R\left(\frac{18}{11}T - 3T\right) = \frac{5\cdot 15}{11^2}\nu RT = \frac{75}{121}\nu RT = 0,62\nu RT$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно найдены количества вещества газа в отсеках – 1 балл
2. Правильно найдена конечная температура в сосуде – 1 балл
3. Доказано, что с газами в отсеках происходят изобарические процессы – 1 балл
4. Использовано правильное утверждение, что количество теплоты, полученное газом в изобарическом процессе, составляет пять третьих изменения внутренней энергии – 1 балл
5. Правильные ответы для количеств теплоты, прошедших через поршни 2 и 3 – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Очевидно, что в процессе установления равновесия крайние пластинки приобретут некоторые электрические заряды (равные по величине и противоположные по знаку). Действительно, если бы это было не так, то между крайними пластинками существовала бы разность потенциалов, поскольку в процессе переноса заряда с одной на другую электрическое поле совершало бы работу. А она должна быть равна нулю, поскольку крайние пластинки соединены проводником. Заряды этих пластин найдем из условия равенства нулю разности потенциалов между ними.

Пусть крайние пластины приобрели заряды $-Q$ и Q (см. рисунок). Тогда напряженность электрического поля между средними пластинками будет равна



$$E_1 = \frac{q-Q}{S\varepsilon_0}$$

(S - площадь пластин, ε_0 - электрическая постоянная), а между крайними и средними –

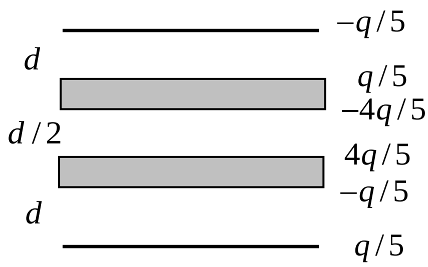
$$E_2 = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$$

причем векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ должны быть направленными противоположно. Работа, которую совершит электрическое поле при переносе пробного заряда δq между крайними пластинами, должна быть равна нулю. Отсюда получаем

$$\delta q E_1 \frac{d}{2} = \delta q E_2 2d \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{q}{5}$$

Это значит, что по проводнику, соединяющему крайние пластинки в направлении верхней пластинки протечет электрический заряд $-q/5$.

Чтобы найти количество теплоты, выделившееся на резисторе, заметим, что после установления равновесия нашу цепь можно представить как три последовательно соединенных конденсатора с зарядами $q/5$, $4q/5$ и $q/5$. Чтобы в этом убедиться, достаточно считать средние пластинки имеющими некоторую толщину. Тогда их верхние и нижние поверхности приобретут указанные заряды, так чтобы поле внутри самих пластинок равнялось бы нулю (см. рисунок). Причем емкости этих конденсаторов будут равны



$$C_в = \frac{S\varepsilon_0}{d}, \; C_{ср} = \frac{2S\varepsilon_0}{d} \text{ и } C_н = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$

Поэтому энергия цепи после установления равновесия будет равна

$$W_к = \frac{(q/5)^2}{2C_в} + \frac{(4q/5)^2}{2C_{ср}} + \frac{(q/5)^2}{2C_н} = \frac{q^2 d}{5S\varepsilon_0}$$

Начальная энергия цепи (до замыкания ключа) есть

$$W_н = \frac{q^2}{2C_{ср}} = \frac{q^2 d}{4S\varepsilon_0}$$

Очевидно, вся избыточная энергия должна перейти в тепло Q, причем поскольку в цепи есть только один элемент, имеющий сопротивление, вся избыточная энергия выделится на резисторе

$$Q = W_н - W_к = \frac{1}{20}\frac{q^2 d}{S\varepsilon_0}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильные уравнения для зарядов крайних пластин – 1 балл
2. Правильно найдены заряды крайних пластин – 1 балл
3. Правильный ответ для заряда, прошедшего через проводник в процессе установления равновесия (со знаком) – 1 балл
4. Правильно найдены начальная и конечная энергии цепи – 1 балл
5. Правильный ответ для количества теплоты, которое выделилось на резисторе – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Если бы суммы внешних сил, действующих на пластинку, и их моментов равнялись бы нулю, то центр пластинки (совпадающий с ее центром масс) двигался бы с постоянной скоростью, а пластинка вращалась бы с постоянной угловой скоростью. В этом случае система отсчета, связанная с центром пластинки, являлась бы инерциальной, и ускорения всех точек пластины в нашей («лабораторной») системе отсчета были бы такие же, как и в системе отсчета, связанной с центром. Но в системе отсчета центра масс пластинка вращается вокруг центра, ускорения ее вершин являются центростремительными и одинаковыми по величине, поскольку вершины находятся на одинаковых расстояниях от центра.

А для данного в условии квадрата они разные. Следовательно, на пластинку действуют внешние силы, сумма которых и (или) сумма их моментов не равны нулю.

Пусть сумма внешних сил, действующих на пластинку, не равна нулю, а сумма их моментов равна нулю. Тогда центр масс пластинки движется с ускорением, а сама пластинка вращается вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью. Поскольку для скоростей всех точек пластинки в любой момент времени справедливо соотношение

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1c} + \vec{V}_c ,$$

($\vec{v}_1$ - скорость некоторой точки пластинки в лабораторной системе, $\vec{v}_{1c}$ - скорость этой же точки в системе отсчета, связанной с центром масс, $\vec{V}_c$ - скорость центра масс) то такое же соотношение будет справедливо и для ускорений:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1c} + \vec{a}_c \qquad (3)$$

где $\vec{a}_1$ - ускорение некоторой точки пластинки в лабораторной системе, $\vec{a}_{1c}$ - ускорение этой же точки в системе отсчета, связанной с центром масс, $\vec{a}_c$ - ускорение центра масс. Но поскольку в системе отсчета, связанной с центром масс пластинка вращается с постоянной угловой скоростью вокруг центра масс, ускорения всех вершин – центростремительные. А поскольку все вершины квадрата находятся на равных расстояниях от его центра, ускорения вершин в системе отсчета, связанной с его центром одинаковы по величине и направлены к центру квадрата. Это значит, что ускорение каждой вершины можно представить как сумму некоторого вектора, одинакового для всех вершин, и векторов, которые для каждой вершины одинаковы по величине и направлены к центру квадрата.

Пусть и сумма внешних сил, действующих на пластинку, и сумма их моментов не равны нулю. Тогда в системе отсчета, связанной с центром пластинки, пластинка будет вращаться с ускорением (т.е. угловая скорость вращения пластинки будет увеличиваться или уменьшаться). Поэтому ускорения вершин будут иметь и нормальную, и тангенциальную составляющие, причем из-за одинаковых расстояний от центра квадрата до всех четырех вершин и нормальные, и тангенциальные составляющие ускорений вершин одинаковы по величине и направлены – к центру квадрата (нормальная компонента ускорения), и параллельно скорости каждой вершины (тангенциальная компонента ускорения). А поскольку все эти направления перпендикулярны друг другу, то ускорение каждой вершины можно представить как сумму некоторого вектора, одинакового для каждой вершины (ускорения центра квадрата), и векторов, которые для каждой вершины одинаковы по величине и перпендикулярны друг другу.

Проведенные рассуждения показывают, что во всех ситуациях, когда на пластинку действуют внешние силы, ускорение вершин пластинки можно представить как сумму некоторого вектора, одинакового для каждой вершины (ускорения центра квадрата), и векторов, которые для каждой вершины одинаковы по величине и перпендикулярны друг другу. Используем это обстоятельство для нахождения ускорений вершин.

Так как ускорения вершин A и C одинаковы по величине, а векторы их ускорений в системе отсчета, связанной с центром квадрата, направлены противоположно друг другу, то сложение ускорений (3) для этих вершин может быть только таким как это показано на рисунке 1. Т.е. векторы ускорения центра квадрата $\vec{a}_c$ и векторы ускорений этих вершин относительно центра квадрата $\vec{a}_{Ac}$ и $\vec{a}_{Cc}$ должны быть перпендикулярны друг другу.

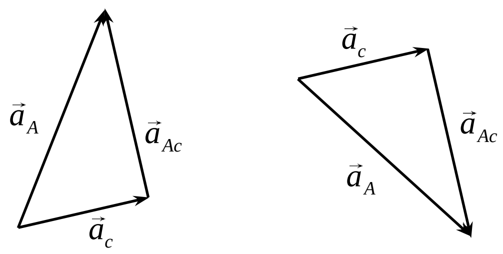


Рис. 1

А поскольку вектор ускорения вершины B в системе отсчета, связанной с центром квадрата $\vec{a}_{Bc}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}_{Ac}$ и $\vec{a}_{Cc}$, то он может быть либо параллельным, либо антипараллельным вектору $\vec{a}_c$. При этом, поскольку $a_B > a_A, a_C$, то векторы $\vec{a}_c$ и $\vec{a}_{Bc}$ параллельны друг другу. Т.е. сложение ускорений для вершины B может быть только таким, как это показано на рисунке 2.

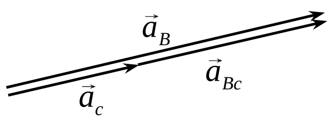


Рис. 2

Таким образом, для модулей векторов ускорения центра квадрата и каждой вершины квадрата в системе центра справедливы следующие соотношения. Либо

$$\begin{aligned} &a = \sqrt{a_c^2 + a_{верш,c}^2} \\ &\frac{5}{4}a = a_c + a_{верш,c} \end{aligned}, \qquad (4)$$

и тогда ускорение вершины D равно

$$a_D = \left| a_c - a_{верш,c} \right|,$$

(тут следует поставить модуль, поскольку возможны разные соотношения величин ускорения центра и вершин, которые заранее нам неизвестны). Здесь a_c - величина ускорения центра квадрата, $a_{верш,c}$ - величина ускорения каждой вершины относительно центра.

Выражая из второго из уравнений (4) величину a_c и подставляя ее в первое уравнение, получим квадратное уравнение относительно $a_{верш,c}$

$$2a_{верш,c}^2 - \frac{5}{2}a_{верш,c}a + \frac{9}{16}a^2 = 0$$

Реншая это квадратное уравнение, найдем два набора корней системы (4):

первый набор: $$a_{верш,c}^{(1)} = \frac{\left(5+\sqrt{7}\right)a}{8}, \qquad a_c^{(1)} = \frac{\left(5-\sqrt{7}\right)a}{8}$$

второй набор: $$a_{верш,c}^{(2)} = \frac{\left(5-\sqrt{7}\right)a}{8}, \qquad a_c^{(2)} = \frac{\left(5+\sqrt{7}\right)a}{8}$$

Ускорение вершины D получается одинаковым и для первого, и для второго набора корней системы (4)

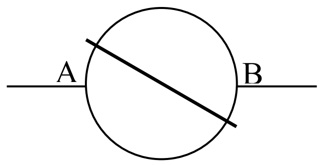
$$a_D = \frac{\sqrt{7}}{4}a$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная основная идея решения – связать ускорения вершин в системе отсчета, связанной с землей и в системе центра масс – 1 балл
2. Правильный вывод (с обоснованием), что ускорения вершин квадрата в системе центра масс перпендикулярны друг другу и равны по величине - 1 балл
3. Правильный вывод (с обоснованием), что ускорения вершин А и С в системе центра масс перпендикулярны вектору ускорения центра масс - 1 балл
4. Правильное сложение ускорений для вершины В – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

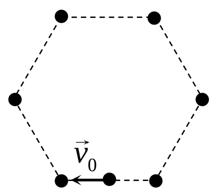
Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.

Решения и критерии оценивания решений задач
Заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике,
2023-2024 учебный год, 11 класс, регионы РФ

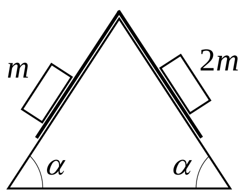
1. Сосуд объемом $V=1$ л заполнили азотом в количестве вещества $\nu=1$ моль под давлением $p=10^5$ Па (1 атмосфера). Затем азот стали медленно откачивать из сосуда, поддерживая температуру в сосуде постоянной. Какую массу азота нужно откачать, чтобы давление в сосуде упало в три раза? Какое количество теплоты нужно подвести за это время к сосуду, чтобы поддерживать постоянной его температуру? Вам могут понадобиться (а могут и не понадобиться) следующие данные. Молярная масса азота $\mu=28$ г/моль, температура кипения азота при атмосферном давлении $T_к=77$ К, температура плавления азота $T_{пл}=63$ К, удельная теплота испарения азота $r=2,0\cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота плавления азота $\lambda=2,6\cdot 10^4$ Дж/кг. Газообразный азот считать идеальным газом.



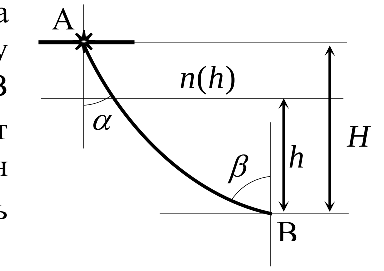
2. Из проволоки сопротивлением $2R=2$ Ом сделали кольцо и включили его в электрическую сеть напряжением $U=10$ В между точками А и В, лежащими на противоположных концах одного диаметра. Перемычку с пренебрежимо малым сопротивлением положили на кольцо так, что перемычка касается кольца в двух противоположных концах одного диаметра, и в этих точках существует электрический контакт между кольцом и перемычкой (см. рисунок). Какой максимальной мощности, выделяемой на участке АВ, можно добиться, поворачивая перемычку? Под каким углом к прямой АВ ее следует в этом случае расположить? Проволока кольца и перемычка выдерживают максимальный ток $I_0=20$ А. Напряжение сети не зависит от сопротивления нагрузки.



3. Шесть одинаковых гладких маленьких шайб расположены на гладкой горизонтальной плоскости в вершинах правильного шестиугольника со стороной a. Седьмая точно такая же шайба находится посередине одной из сторон шестиугольника. Седьмой шайбе сообщают такую скорость $\vec{v}_0$ в направлении одной из вершин (см. рисунок), что она последовательно сталкивается со всеми «вершинными» шайбами. Какую скорость будет иметь эта шайба после шестого столкновения? Через какое время после первого столкновения произойдет шестое? Все столкновения шайб абсолютно упругие. Трение отсутствует.



4. Через вершину гладкой закрепленной равнобедренной призмы с углами при основании α переброшена невесомая нерастяжимая лента, на которую поставлены два бруска – массой m и $2m$. Коэффициенты трения между брусками и лентой одинаковы и равны μ, между лентой и призмой трения нет. Найти ускорение ленты.



5. Гибкая массивная веревка подвешена к потолку в точке А и закреплена в точке В, находящейся на H ниже точки А. Известно, что угол между веревкой и вертикалью в точке А равен α, в точке В - β (см. рисунок). В точке А находится точечный источник света. Как должен зависеть от высоты h над точкой В показатель преломления воздуха $n(h)$, чтобы один из лучей источника, преломляясь в воздухе, распространялся вдоль веревки до точки В? Показатель преломления на высоте точки В равен n_0.

Решения и критерии оценивания решений задач

1. Как известно, один моль идеального газа занимает при нормальных условиях ($p_0 = 10^5$ Па, $T = 273\,K$) объем $V = 22,4$ л. Действительно, из закона Клапейрона-Менделеева для одного моля идеального газа имеем

$$V = \frac{RT_0}{p_0} = \frac{8,31 \cdot 273}{10^5} = 22,69 \text{ (л)}$$

(правильное значение 22,41 л; для упрощения расчетов мы считали атмосферное давление равным $p_0 = 10^5$ Па вместо обычно используемого $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Па). В любом случае, объём азота в нашем опыте – 1 литр. А это значит, что основное количество азота находится в сосуде не в газообразном состоянии, а пары газообразного азота являются насыщенными. А поскольку давление этого азота равно атмосферному, то часть азота в сосуде является жидким и находится при температуре кипения (поскольку температура кипения азота при атмосферном давлении $T_к = 77$ К). Следовательно, температура в сосуде равна температуре кипения азота при атмосферном давлении - $T_к = 77$ К. И в течение всего процесса эту температуру поддерживают в сосуде. Но пока в сосуде есть жидкий азот при температуре кипения, давление насыщенных паров азота будет оставаться равным атмосферному. Поэтому чтобы уменьшить давление азота, мы должны испарить и откачать весь жидкий азот в изобарическом процессе. Пусть в сосуде к тому моменту, когда давление азота упало втрое, осталась масса азота m. Тогда закон Клапейрона-Менделлева дает

$$\frac{p_0}{3} V = \frac{m}{\mu} RT_0$$

Отсюда находим массу азота, которая останется в сосуде к тому моменту, когда давление азота станет $p_0 / 3$

$$m = \frac{\mu p_0 V}{3RT}$$

А поскольку первоначально в сосуде был один моль азота, то откачать нужно

$$\Delta m = 1(\textit{моль}) \cdot \mu - \frac{\mu p_0 V}{3RT} = \mu \left(1 - \frac{p_0 V}{3RT} \right) = 26,5 \text{ г}$$

азота. Чтобы найти, какое количество теплоты нужно подвести в течение процесса сосуду, найдем массу испарившегося азота. Первоначально из 28 г азота в газообразном состоянии находилась масса

$$m_1 = \frac{\mu p_0 V}{RT}.$$

Поэтому была испарена масса азота

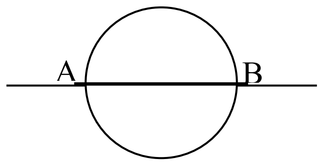
$$m_2 = 1(моль)\cdot\mu - \frac{\mu p_0 V}{RT} = \mu\left(1 - \frac{p_0 V}{RT}\right),$$

на испарение которой нужно затратить количество тепла

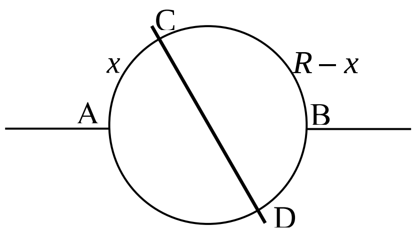
$$Q = rm_2 = r\mu\left(1 - \frac{p_0 V}{RT}\right) = 0,61 \text{ Кдж}$$

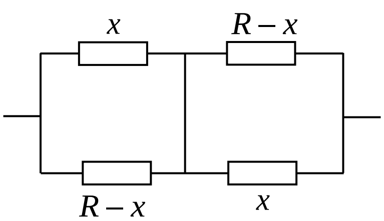
Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильный вывод, что основное количество азота находится в жидком состоянии – 1 балл
2. Правильно определена температура в сосуде – температура кипения азота при атмосферном давлении - 1 балл
3. Правильно использован закон Клапейрона-Менделеева – 1 балл
4. Правильно найдена масса откачанного азота – 1 балл
5. Правильно найдено количество теплоты, которое необходимо подвести к сосуду – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Очевидно, что главным ограничением на максимальную мощность, выделяемую на участке AB, является ограничение тока в проводах. Действительно, если поместить перемычку так, как показано справа на рисунке, то сопротивление цепи будет равно нулю (поскольку перемычка не имеет сопротивления) и при фиксированном напряжении сети на участке АБ будет выделяться бесконечная мощность, но ток в перемычке будет бесконечно большим, а у нас есть ограничение на его величину. Поэтому основная идея решения заключается в том, чтобы найти такое положение перемычки, чтобы ток в перемычке и проводах не превышал предельного значения, а сопротивление цепи было минимально возможным. При этом при любом положении перемычки по отношению к диаметру AB главное ограничение даст ток в участках кольца, поскольку ток в перемычке будет равен разности токов в верхнем и нижнем участках кольца, т.е. будет обязательно меньше, чем максимальный ток в участках кольца.



Поэтому рассмотрим некоторое положение перемычки, найдем мощность в цепи и силу тока в проводах, и учтем ограничение на ток. Итак, пусть перемычка расположена так, что сопротивление участка AC (и BD) равно x (см. рисунок справа). Тогда сопротивление участков CB и AD равно $R-x$. А поскольку перемычка не имеет сопротивления, наша цепь эквивалентна цепи, показанной на рисунке слева. Ее сопротивление равно





$$R_{об} = \frac{2x(R-x)}{R}$$

и в зависимости от x меняется от нуля (при $x=0$ или $x=R$) до $R/2$ (при $x=R/2$). Через участки цепи AC (BD) и AD (CB) текут следующие токи

$$I_x = \frac{U}{2x}, \qquad I_{R-x} = \frac{U}{2(R-x)}$$

а ток через перемычку будет обязательно меньше, поскольку в узлах C и D ток разветвляется.

Из закона Джоуля-Ленца следует, что при фиксированном напряжении сети, мощность, выделяемая в цепи, определяется соотношением

$$P = \frac{U^2}{R_{об}}$$

Поэтому мощность будет тем больше, чем меньше сопротивление цепи. Но при этом растут и токи в проводах, а они по условию не могут превосходить значение I_0. Поэтому в цепи будет выделяться максимальная мощность, когда один из токов в проводах кольца будет равен I_0. Отсюда находим сопротивление x, отвечающее этому току

$$x = \frac{U}{2I_0} = 0,25 \text{ Ом}$$

Это сопротивление составляет четверть сопротивления верхней (и нижней) полуокружностей. Это значит, что мощность, выделяемая в цепи, будет максимальна, когда перемычка расположена под углом $45°$ к прямой AB (так как сопротивление полуокружностей равно 1 Ом, а сопротивление x составляет четверть этой величины). В этом случае сопротивление цепи равно

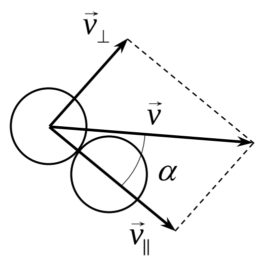
$$R_{об} = \frac{3R}{8} = 0,375 \text{ Ом}$$

а максимальная мощность, выделяемая в цепи, есть

$$P_{\max} = \frac{U^2}{(3R/8)} = \frac{8U^2}{3R} = 267 \text{ Вт.}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное использование законов Ома и Джоуля-Ленца – 1 балл
2. Правильно найдено общее сопротивление цепи в зависимости от расположения перемычки – 1 балл
3. Правильно найден ток через провода цепи в зависимости от расположения перемычки – 1 балл
4. Правильный ответ для угла между перемычкой и прямой AB при выделении максимальной мощности – 1 балл
5. Правильный ответ для максимальной мощности – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Ясно, что столкновения шайб должны быть не лобовыми, а такими, чтобы шайба-биток после столкновения двигалась под углом $\alpha = 60°$ к направлению своего первоначального движения. Поэтому рассмотрим нелобовое столкновение шайб одинаковой массы. Итак, пусть одна шайба покоится, вторая налетает на нее с некоторой скоростью $\vec{v}$, направленной не по линии, соединяющей центры шайб (см. рисунок).



Разложим скорость $\vec{v}$ на две составляющих: $\vec{v}_{\parallel}$ - направленную по прямой, соединяющей центры шайб в момент удара, и $\vec{v}_{\perp}$ - направленную перпендикулярно этому направлению (см. рисунок). Поскольку между шайбами нет трения, то сила взаимодействии шайб в момент удара направлена по линии, соединяющей их центры. Поэтому проекция силы взаимодействия шайб на $\vec{v}_{\perp}$ равна нулю, и, следовательно, перпендикулярная составляющая скорости налетающей шайбы не меняется в момент удара. А вот параллельная составляющая скорости будет меняться, причем независимо от величины перпендикулярной составляющей, поскольку проекция второго закона Ньютона на $\vec{v}_{\parallel}$ не содержит никаких величин, входящих в перпендикулярную проекцию. А это значит, что $\vec{v}_{\parallel}$ будет меняться так, как будто происходит лобовое столкновение шайб, причем налетающая шайба имеет скорость $\vec{v}_{\parallel}$.

Как известно, при абсолютно упругом лобовом столкновении тел одинаковых масс жти тела обмениваются скоростями)это утверждение можно строго доказать с помощью законов сохранения энергии и импульса. Поэтому в нашем случае шайба-биток потеряет скорость $\vec{v}_{\perp}$ и после столкновения не будет двигаться в направлении, соединяющем центры шаров в момент столкновения, а вторя шайба будет двигаться со скоростью $\vec{v}_{\perp}$ в этом направлении. Таким образом, после нелобового упругого столкновения шайба-биток будет двигаться со скоростью $v_{\perp} = v_0 \cos(90° - \alpha) = v_0 \sin\alpha$ под углом $90° - \alpha$ к направлению своего первоначального движения, где α - угол между вектором скорости этой шайбы до удара и направлением между центрами шайб в момент удара (см. рисунок). А поскольку шайбы маленькие, и шайба-биток после столкновения с первой шайбой должна столкнуться со второй, шайба-биток после первого удара должна двигаться под углом $60°$ по отношению к своему первоначальному движению, угол α должен равняться $30°$

$$\alpha = 30°$$

Значит, величина скорости этой шайбы после удара с первой шайбой, расположенной в вершине шестиугольника, есть

$$v_1 = \frac{1}{2} v_0$$

И, следовательно, время, прошедшее между первым и вторым столкновением, есть

$$t_{1-2} = \frac{a}{v_1} = \frac{a}{(v_0/2)} = \frac{2a}{v_0}$$

Аналогично рассматриваются и остальные столкновения шайб. После второго столкновения шайба-биток будет иметь скорость

$$v_2 = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{4} v_0$$

и затратит на движение до третьей шайбы время

$$t_{2-3}=\frac{a}{v_2}=\frac{4a}{v_0}$$

После третьего столкновения шайба-биток будет иметь скорость

$$v_3=\frac{1}{2}v_2=\frac{1}{8}v_0$$

и затратит на движение до четвертой шайбы время

$$t_{3-4}=\frac{a}{v_3}=\frac{8a}{v_0}$$

После четвертого столкновения шайба-биток будет иметь скорость

$$v_4=\frac{1}{2}v_3=\frac{1}{16}v_0$$

и затратит на движение до пятой шайбы время

$$t_{4-5}=\frac{a}{v_4}=\frac{16a}{v_0}$$

После пятого столкновения шайба-биток будет иметь скорость

$$v_5=\frac{1}{2}v_4=\frac{1}{32}v_0$$

и затратит на движение до шестой шайбы время

$$t_{5-6}=\frac{a}{v_5}=\frac{32a}{v_0}$$

После шестого столкновения шайба-биток будет иметь скорость

$$v_6=\frac{1}{2}v_5=\frac{1}{64}v_0\,.$$

А полное время, прошедшее от первого до шестого столкновения будет равно

$$t=t_{1-2}+t_{2-3}+t_{3-4}+t_{4-5}+t_{5-6}=\frac{2a}{v_0}+\frac{4a}{v_0}+\frac{8a}{v_0}+\frac{16a}{v_0}+\frac{32a}{v_0}=\frac{62a}{v_0}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное рассмотрение нецентрального упругого столкновения – независимое рассмотрение движения шайбы-битка в направлении, соединяющем центры шаров, и в перпендикулярном направлении – 1 балл
2. Правильно найдены скорость шайбы-битка после нецентрального столкновения и угол между ее скоростью после и до столкновения – 1 балл
3. Правильно построена «цепочка» соотношений для скорости и времени движения после 1-го, 2-го и т.д. го столкновений – 1 балл
4. Правильный ответ для скорости шайбы-битка после шестого столкновения – 1 балл
5. Правильный ответ для времени между первым и шестым столкновениями – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Поскольку лента невесома, то сумма сил действующих на нее должна равняться нулю. А это значит, что один или два бруска не должны перемещаться относительно ленты. Действительно, если бы относительно ленты перемещались оба бруска, то на ленту в направлении вдоль нее действовала бы разность сил трения скольжения

$$\mu 2mg\cos\alpha - \mu mg\cos\alpha\,,$$

которая не равна нулю.

Очевидно, что брусок большей массы будет покоиться относительно ленты, поскольку если бы он двигался, то сила трения, действующая со стороны него на ленту, была бы равна $2\mu mg\cos\alpha$, а максимальная сила трения покоя второго тела не превосходит $\mu mg\cos\alpha$, т.е. не может компенсировать первую силу.

Рассмотрим теперь движение второго бруска. Предположим, что он покоится относительно ленты. Тогда система брусков и лента движутся как целое под действием двух сил, направленных вдоль плоскости

$$2mg\sin\alpha - mg\sin\alpha = mg\sin\alpha$$

Поэтому ускорение ленты есть

$$a = \frac{1}{3}g\sin\alpha$$

и направлено вправо. Для меньшего бруска оно создается двумя силами – силой трения $F_{тр}$, направленной вверх вдоль плоскости и проекцией силы тяжести $mg\sin\alpha$:

$$m\frac{1}{3}g\sin\alpha = F_{тр} - mg\sin\alpha$$

Отсюда находим

$$F_{тр} = \frac{4}{3}mg\sin\alpha$$

А поскольку сила трения не может превосходить максимальную силу трения покоя $\mu mg\cos\alpha$, то этот случай реализуется, если

$$F_{тр} = \frac{4}{3}mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mu \ge \frac{4}{3}\,\mathrm{tg}\alpha$$

Таким образом, при $\mu \ge (4/3)\,\mathrm{tg}\alpha$ оба бруска будут покоится относительно ленты, которая будет двигаться с ускорением $a = (g/3)\sin\alpha$.

Если для коэффициента трения выполнено обратное неравенство $\mu \le (4/3)\,\mathrm{tg}\alpha$, то меньший брусок будет скользить по ленте, и с его стороны на ленту будет действовать сила трения $\mu mg\cos\alpha$. А так как суммарная сила, действующая на ленту, должна равняться нулю, то с такой же силой трения на ленту будет действовать и больший брусок. Следовательно, со стороны ленты на второй брусок действует такая же сила трения $\mu mg\cos\alpha$. Поэтому второй закон Ньютона для второго бруска дает

$$2ma = 2mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

откуда находим ускорение второго бруска (и ленты) в случае, когда $\mu \le (4/3)\,\mathrm{tg}\alpha$

$$a = g\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\mu\cos\alpha\right)$$

Собирая вместе оба случая, получаем

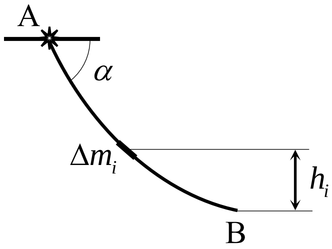
если $\mu \ge (4/3)\,\mathrm{tg}\alpha$, то оба бруска покоятся относительно ленты, ее ускорение есть $a = \frac{1}{3} g \sin\alpha$,

если $\mu \le (4/3)\,\mathrm{tg}\alpha$, то большой брусок покоится относительно ленты, меньший движется, ускорение ленты есть $a = g\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\mu\cos\alpha\right)$.

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Использование правильной формулы для максимальной силы трения покоя для тела на наклонной плоскости $\mu mg\cos\alpha$ - 1 балл
2. Правильный (и обоснованный) вывод, что больший брусок покоится относительно ленты – 1 балл
3. Правильно найдено ускорение ленты в случае, когда оба бруска покоятся относительно ленты – 1 балл
4. Правильно найдено условие покоя меньшего бруска относительно ленты – 1 балл
5. Правильно найдено ускорение ленты в случае, когда меньший брусок движется относительно ленты – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Любое тело, находящееся в равновесии, располагается так, что его потенциальная энергия в тех внешних полях, в которых находится тело, достигает минимума. Это значит, что потенциальная энергия веревки в поле силы тяжести минимальна. Потенциальную энергию П веревки в поле силы тяжести можно найти, мысленно разбивая ее на малые участки и суммируя их потенциальные энергии

$$\Pi = \sum_i \Delta m_i g h_i = \sum_i \lambda \Delta l_i g h_i \qquad (1)$$



где Δm_i - масса i-го участка веревки, g - ускорение свободного падения, h_i - высота этого участка веревки по отношению к точке B, которая выбрана за начало отсчета потенциальной энергии в поле силы тяжести, $\lambda = m/l$ - линейная плотность веревки, m - ее масса, l - длина, сумма (1) пробегает по всем участкам веревки (см. рисунок). Таким образом, веревка в равновесии располагается так, что сумма (1) минимальна среди всех возможных ее расположений между точками A и B

$$\sum_i \lambda \Delta l_i g h_i = \min \qquad (2)$$

Теперь рассмотрим распространение светового луча. Допустим, мы подобрали такую зависимость показателя преломления воздуха от высоты, что луч распространяется вдоль веревки. Известно, что луч распространяется между двумя фиксированными точками так, что время его распространения минимально (принцип Ферма). А это значит, что для светового луча, вышедшего из А и пришедшего в В вдоль веревки, справедливо условие

$$t = \sum_i \frac{\Delta l_i}{c(h_i)} = \min$$

где t - время распространения рассматриваемого луча, Δl_i - длины тех же самых маленьких кусочков веревки, на которые мы мысленно разбили ее, когда вычисляли потенциальную энергию, $c(h_i)$ - скорость света на высоте h_i. С другой стороны скорость света в среде связана с показателем преломления данной среды

$$c(h_i) = \frac{c}{n(h_i)}$$

где c - скорость света в вакууме, $n(h_i)$ - показатель преломления воздуха на высоте h_i над точкой В. Отсюда получаем для времени распространения светового луча вдоль веревки АВ

$$t = \sum_i \frac{\Delta l_i n(h_i)}{c} = \min \qquad (3)$$

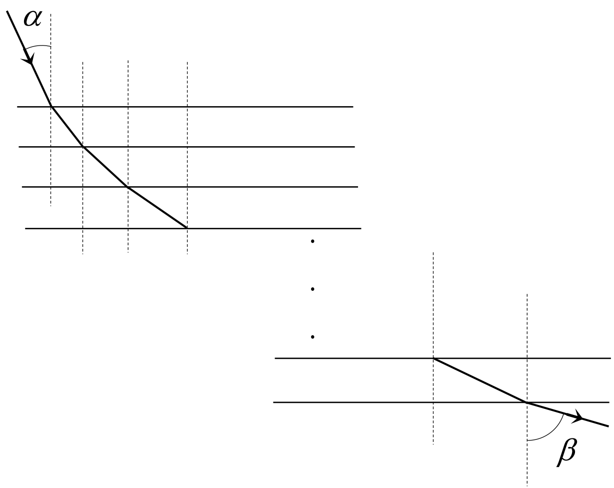
И сумма (2), и сумма (3) достигают минимума, причем при любом разбиении веревки на малые участки Δl_i. А это возможно только тогда, когда все остальное (кроме Δl_i) в этих суммах пропорционально друг другу или, возможно, отличается на постоянную. Поэтому

$$n(h_i) = G + Fh_i \qquad (4)$$

где G и F - некоторые постоянные. Эти постоянные можно найти из заданных значений показателя преломления в точках А и В. В точке В показатель преломления равен n_0. Отсюда получаем, что

$$G = n_0$$

Найдем показатель преломления в точке А. Чтобы распространяться вдоль веревки, в точке А луч должен распространяться под углом α к горизонту. Мысленно разобьем воздух на горизонтальные слои (см. рисунок) настолько тонкие, что показатель преломления внутри слоя можно было считать постоянным, и запишем для каждого слоя закон преломления



$$\begin{gathered} n \sin\alpha = n_1 \sin\alpha_1 \\ n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 \\ \dots \\ n_N \sin\alpha_N = n_0 \sin\beta \end{gathered}$$

где n - показатель преломления воздуха в точке А, n_1, n_2, … n_N - показатели преломления слоев, N - их количество. Складывая все эти формулы, получим

$$n \sin\alpha = n_0 \sin\beta$$

откуда находим показатель преломления воздуха около точки А

$$n = \frac{n_0 \sin\beta}{\sin\alpha}$$

Отсюда и формулы (4) находим вторую постоянную в зависимости показателя преломления от высоты

$$F = \frac{n(H) - G}{H} = \frac{n_0\left(\sin\beta - \sin\alpha\right)}{H \sin\alpha}$$

В результате искомая зависимость показателя преломления воздуха от высоты имеем вид

$$n(h) = n_0 + \frac{n_0\left(\sin\beta - \sin\alpha\right)}{H \sin\alpha} h$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Если есть попытки связать показатель преломления с расположением веревки через минимум потенциальной энергии и принцип Ферма - 1 балл
2. Правильный (и обоснованный) вывод, что зависимость показателя преломления от высоты – линейная – 1 балл
3. Правильно найден показатель преломления воздуха в точке А – 1 балл
4. Правильный способ нахождения постоянных – через показатели преломления в точках А и В - 1 балл
5. Правильная зависимость показателя преломления от высоты – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.