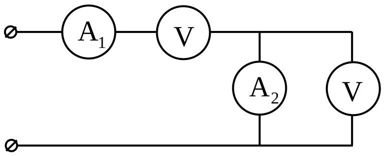
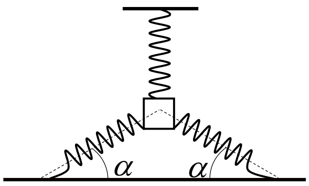
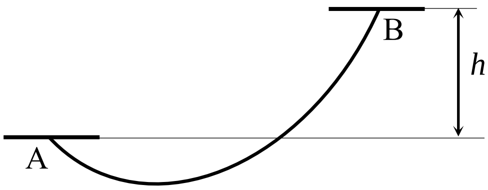
Решения и критерии оценивания решений задач
Заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике,
2023-2024 учебный год, 9 класс

1. Собрана электрическая цепь, состоящая из идеального источника напряжения, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых амперметров (см. схему). Известны показания трех приборов: первого амперметра ($I_1 = 1{,}5$ мА) и двух вольтметров ($U_1 = 0{,}2$ В, $U_2 = 2{,}4$ В). Найти показания второго амперметра и напряжение источника.



2. Груз массой m, прикрепленный к трем пружинам, находится в равновесии. Верхняя пружина вертикальна, причем сила ее натяжения направлена вертикально вверх и составляет $F = 2mg$. Две нижних пружины одинаковы и составляют одинаковый углы α с горизонтом (см. рисунок). Найти ускорение груза сразу после перерезания верхней пружины. Одной из нижних пружин (после восстановления верхней).





3. Однородную нерастяжимую гибкую веревку массой m и длиной l подвесили в двух точках А и В, находящихся на разных высотах (см. рисунок). Сила натяжения веревки в точке А известна и равна T_A. Найти силу натяжения веревки в точке В, которая находится на h выше точки А.

4. В теплоизолированный цилиндрический сосуд опустили кусок льда при нулевой температуре и приклеили его ко дну. Затем в сосуд налили такое же (по массе) количество теплой воды. Вода полностью покрыла лед и достигла уровня $H = 20$ см над дном сосуда. При установлении теплового равновесия уровень воды в сосуде опустился на $\Delta h = 0{,}5$ см. Найти температуру теплой воды. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, плотность льда $\rho_1 = 0{,}9$ г/см^3, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг$\cdot$град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^2$ кДж/кг.

5. Лиса пытается поймать суслика, который перебегает из норки А в норку В, находящиеся на расстоянии d друг от друга. Скорость лисы в три раза меньше скорости суслика. При этом суслик дразнит лису. Он по вибрации почвы чувствует, где находится лиса, и стартует только в том случае, когда лиса не может поймать его. По возможности точно нарисуйте область, находясь в которой лиса сможет поймать суслика, обоснуйте ваше построение и определите площадь этой области.

Решения и критерии оценивания решений задач

1 вариант

1. Поскольку ток, текущий через вольтметр, последовательно соединенный с амперметром (будем далее называть его первым вольтметром), больше тока, текущего через вольтметр, соединенный с амперметром параллельно (второй вольтметр), то показание $U_1 = 0,2$ В относится ко второму вольтметру, показание $U_2 = 2,4$ В – к первому.

Пусть сопротивление амперметров - r_A, вольтметров - r_V. Так как вольтметр показывает напряжение на самом себе, и через него течет тот же ток, что и через первый амперметр, из закона Ома для первого вольтметра имеем

$$r_V = \frac{U_2}{I_1}$$

Поскольку сопротивление вольтметров одинаково, то ток, текущий через второй вольтметр, в U_1/U_2 раза меньше тока, текущего через первый. Поэтому ток, текущий через второй амперметр, равен

$$I_2 = I_1 - \frac{U_1}{U_2} I_1 = \frac{U_2 - U_1}{U_2} I_1 = 1,375 \text{ мА}$$

А поскольку отношение токов, текущих через элементы цепи на участке параллельного соединения, обратно отношению их сопротивлений, для отношения сопротивлений амперметра и вольтметра и сопротивления амперметра имеем

$$\frac{r_A}{r_V} = \frac{U_1}{U_2 - U_1} \qquad \Rightarrow \qquad r_A = \frac{U_1 U_2}{(U_2 - U_1) I_1}$$

А поскольку напряжение источника равно сумме напряжений на первом амперметре, первом вольтметре, и участке параллельно соединенных второго амперметра и второго вольтметра, имеем для напряжения источника

$$U_0 = \frac{U_1 U_2}{(U_2 - U_1)} + U_1 + U_2 = 2,82 \text{ В}$$

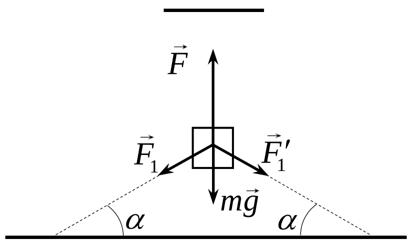
Ответ. $I_2 = \frac{U_2 - U_1}{U_2} I_1 = 1,375$ мА, $U_0 = \frac{U_1 U_2}{(U_2 - U_1)} + U_1 + U_2 = 2,82$ В.

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное использование закона Ома – 1 балл
2. Правильный (и обоснованный) вывод, что показание U_1 относится к вольтметру, включенному параллельно с амперметром - 1 балл
3. Правильно найдены сопротивления вольтметра и амперметра – 1 балл
4. Правильно найдено показание второго амперметра – 1 балл
5. Правильно найдено напряжение источника – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Найдем сначала силы упругости всех пружин. Поскольку сила натяжения верхней пружины равна $F = 2mg$ и направлена вертикально вверх, условие равновесия тела дает

$$mg + 2F_1 \sin\alpha = 2mg$$

где F_1 - сила натяжения нижних пружин (см. рисунок; чтобы меньше загромождать его, мы убрали с рисунка пружины). Отсюда находим силы упругости нижних пружин



$$F_1 = \frac{1}{2}\frac{mg}{\sin\alpha}$$

Рассмотрим теперь процесс перерезания пружин. Пусть мы перерезали верхнюю пружину. Тогда мы убрали ее силу упругости, а вот все остальные силы сразу после перерезания не изменились, поскольку для изменения силы упругости пружины нужно изменить ее деформацию, а для этого тело должно переместиться. А поскольку сумма всех сил, действующих на тело до перерезания пружин была равна нулю, то сумма сил, действующих на тело после перерезания одной пружины по величине равна ее силе упругости, а направлена противоположно. Следовательно, после перерезания верхней пружины на тело со стороны земли и нижних пружин действует сила, равная $2mg$ и направленная вертикально вниз. Поэтому ускорение тела после перерезания верхней пружины равно

$$a_в = 2g$$

и направлено вертикально вниз.

Восстановим теперь верхнюю пружину и перережем одну из нижних. Тогда сумма сил тяжести, верхней и второй боковой пружины направлена противоположно силе упругости перерезанной пружины и равна ей по величине. Поэтому из второго закона Ньютона находим ускорение тела после перерезания одной из нижних пружин

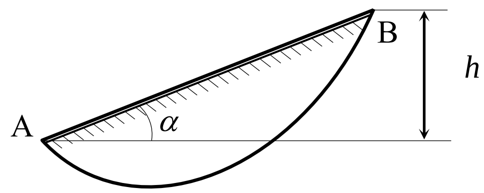
$$a_н = \frac{1}{2}\frac{g}{\sin\alpha}$$

Направлен вектор $\vec{a}_н$ противоположно перерезанной пружине, т.е. под углом α к горизонту вверх.

Ответ. После перерезания верхней пружины $a_в = 2g$, направлено вертикально вверх, после перерезания нижней пружины $a_н = g/(2\sin\alpha)$, направлено противоположно перерезанной пружине.

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное условие равновесия тела до перерезания пружин – 1 балл
2. Правильно найдены силы упругости нижних пружин – 1 балл
3. Правильное утверждение, что сразу после перерезания сумма оставшихся сил равна по величине и противоположна по направлению силе упругости удаленной пружины – 1 балл
4. Правильно найдено ускорение тела (величина и направление) после перерезания верхней пружины – 1 балл
5. Правильно найдено ускорение тела (величина и направление) после перерезания одной из нижних пружин – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Для связывания сил натяжения веревки в токах A и B можно воспользоваться следующим приемом. Соединим точки A и B гладкой наклонной плоскостью и замкнем веревку (т.е. сделаем ее замкнутой с одной частью, лежащей на наклонной плоскости с длиной, равной длине наклонной плоскости; см. рисунок). Докажем, что расположение висящей части веревки при этом не изменится.



Очевидно, веревка, часть которой лежит на наклонной плоскости AB, а часть висит между концами плоскости A и B, будет находится в равновесии (из-за невозможности вечного двигателя). Поэтому и висящая между A и B часть веревки тоже будет находиться в равновесии (как и веревка, концы которой закреплены в точках A и B). Это значит, что если закрепить ее концы в точках A и B и отрезать часть, лежащую на плоскости, мы придем к той самой веревки, которая была подвешена между точками A и B, и расположение которой будет абсолютно таким же, как и у замкнутой веревки, часть которой лежит на плоскости AB. Утверждение доказано.

Теперь легко найти связь сил натяжения веревки в точках A и B. С одной стороны, эти силы обеспечивают равновесие висящей между A и B части веревки. А с другой, они обеспечивают равновесие той части веревки, которая лежит на плоскости. А ее равновесие обеспечивается разностью сил натяжения в точках A и B. Поэтому

$$m_1 g \sin\alpha = T_B - T_A$$

где m_1 - масса той части веревки, которая находится на наклонной плоскости, α - угол наклона плоскости (см. рисунок). Поскольку веревка однородна, то

$$m_1 = \frac{L}{l} m$$

где l - длина наклонной плоскости. Синус угла наклона плоскости найдем геометрически

$$\sin\alpha = \frac{h}{L}$$

В результате получаем

$$T_B = T_A + \frac{mgh}{l}.$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная идея решения – замыкание веревки на плоскости и использование условий ее равновесия – 1 балл
2. Правильное утверждение (с обоснованием), что такая веревка будет находиться в покое - 1 балл
3. Правильное условие равновесия веревки на плоскости - 1 балл
4. Правильно найдена масса части веревки на плоскости и синус угла ее наклона – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.
Другие решения, использующие правильные условия равновесия висящей части веревки (или ее частей) при условии получения правильного ответа оцениваются полным баллом.

4. Исследуем сначала вопрос о том, весь ли лед растаял. Когда в сосуд залили горячую воду, в нем находились одинаковые массы воды и льда. Поэтому для объёма содержимого сосуда имеем

$$SH = \frac{m}{\rho_0} + \frac{m}{\rho_1} \qquad (1)$$

где S - площадь дна сосуда, m - массы воды и льда, ρ_0 и ρ_1 - плотности воды и льда. Найдем, на какую величину ΔH опустится уровень воды в сосуде, если растает весь лед. В этом случае в сосуде будет только вода с массой $2m$, и для ее объема имеем

$$S\left(H - \Delta H\right) = \frac{2m}{\rho_0} \qquad (2)$$

Вычитая теперь (2) из (1), получим

$$S\Delta H = \frac{m}{\rho_1} - \frac{m}{\rho_0} \qquad (3)$$

Из (1), (3) находим

$$\Delta H = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_1} H = \frac{H}{19} \approx 1{,}05 \text{ см.}$$

Таким образом, при таянии куска льда, приклеенного к дну сосуда, содержащего равные массы льда и воды, уровень воды должен понизиться на 1/19. Т.е. для нашего уровня на величину, чуть большую одного сантиметра. А у нас уровень понизился на $\Delta h = 0{,}5$ см. Это значит, что при устоновлении теплового равновесия весь лед не растаял, и, следовательно, в сосуде есть лёд и вода, а его температура - $t_0 = 0°C$. Поэтому уравнение теплового баланса имеет вид

$$cmt = \lambda \Delta m \qquad (4)$$

где t - начальная температура горячей воды, Δm - масса растаявшего льда. Поскольку понижение уровня воды в сосуде связано именно с растаявшим льдом, то

$$S\Delta h = \frac{\Delta m}{\rho_1} - \frac{\Delta m}{\rho_0} = \Delta m \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 \rho_1} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta m = \frac{S\Delta h \rho_0 \rho_1}{\rho_0 - \rho_1} \qquad (5)$$

Для массы воды, налитой в сосуд имеем из (1)

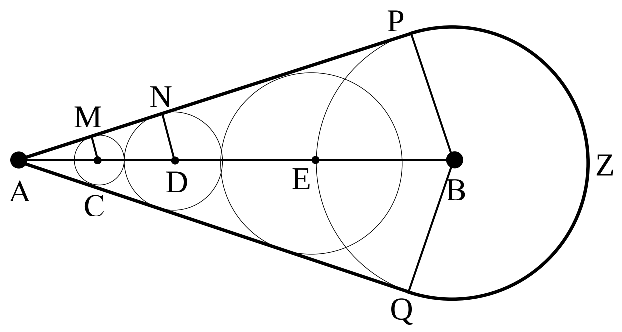
$$m = \frac{SH\rho_0\rho_1}{\rho_0 + \rho_1}$$

В результате из уравнения теплового баланса (4) находим

$$t = \frac{\lambda}{c} \frac{\Delta h}{H} \frac{\rho_0 + \rho_1}{\rho_0 - \rho_1} = 33{,}9°C$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Доказано, что растаял не весь лед – 1 балл
2. Правильный вывод, что температура сосуда $0°C$ - 1 балл
3. Правильное уравнение теплового баланса - 1 балл
4. Правильно найдено количество оставшегося льда – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Будем строить область, из которой лиса сможет догнать суслика, обратным образом. Пусть суслик бежит со своей скоростью из норки A в норку B, а из каждой точки его траектории со своими скоростями и во все стороны бегут лисы. И если лисы бегут в течение того времени, которое суслик бежал до рассматриваемой точки из норки A, то их расположение определит границы области, из которой лиса сможет поймать суслика в рассматриваемой точке. Пересечение этих областей и определит всю область, из которой лиса сможет поймать суслика в какой-нибудь из точек его траектории.



Очевидно, все области, из которых лиса сможет поймать суслика в какой-либо точке, представляют собой окружности, радиус которых в 3 раза меньше, чем расстояние от этой точки до точки A. Действительно, пусть суслик двигался до некоторой точки C (см. рисунок) в течение времени t. Тогда та область, откуда лиса сможет поймать суслика в этой точке, представляет собой окружность с радиусом, в 3 раза меньшим расстояния AC. А если до точки D, суслик бежал вдвое дольше, чем до C, то та область, откуда лиса может поймать суслика в точке D – окружность с в вдвое большим радиусом, чем окружность с центром в точке C. Построение нескольких таких окружностей выполнено на рисунке.

Докажем, что касательные ко всем этим окружностям образуют один и тот же угол с отрезком AB. Действительно, если провести радиусы каждой окружности в точку касания (CM, DN, BP на рисунке), то прямоугольные треугольники ACM, ADN, ABP будут подобны, так как у всех у них катет в 3 раза меньше гипотенузы (или у них одинаковый синус). Таким образом, область, из которой лиса сможет поймать суслика, ограничена частью APBQ угла PAQ и сектором окружности PBQZ. Причем углы PAB и BAQ таковы, что в прямоугольных треугольниках BAP и BAQ катеты BP и BQ трое меньше гипотенузы AB, т.е. равны $d/3$, а $\sin\measuredangle BAP = \sin\measuredangle BAQ = 1/3$. Так же $d/3$ равен радиус сектора PBQZ.

Площадь той области, из которой лиса сможет поймать суслика находится как сумма площадей двух треугольников ABP и ABQ и сектора PBQZ. Поскольку эти треугольники прямоугольные с гипотенузой d и одним из катетов $d/3$, то второй их катет найдем по теореме Пифагора

$$\frac{2\sqrt{2}d}{3},$$

а затем и их площадь

$$S_{\Delta ABP} = S_{\Delta ABQ} = \frac{\sqrt{2}d^2}{9}$$

Поскольку площадь полной окружности с радиусом $d/3$ равна $\pi\left(d/3\right)^2$, то площадь сектора PBQZ. с вырезанным из окружности углом $\measuredangle PBQ = 2\arcsin(1/3)$ равна

$$S_{BPQZ} = \left(\pi - \arcsin(1/3)\right)\frac{d^2}{9}$$

где угол (арксинус) должен быть задан в радианах. Отсюда находим площадь области, откуда лиса сможет догнать суслика

$$S = 2S_{\Delta ABP} + S_{BPQZ} = \frac{2\sqrt{2}d^2}{9} + \left(\pi - \arcsin(1/3)\right)\frac{d^2}{9}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильная идея построения области, откуда лиса может поймать суслика – пересечение областей, откуда лиса может догнать его в различных точках - 1 балл
2. Правильный вывод, что все такие области – окружности с радиусом, равным трети расстояния от центра этой окружности до А – 1 балл
3. Доказательство, что касательные ко всем окружностям образуют один и тот же угол с отрезком АВ – 1 балл
4. Построение качественно правильной области – 1 балл
5. Параметры области – угол и сектор окружности радиуса $d/3$ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.