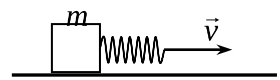
Решения и критерии оценивания
Отборочный тур олимпиады «Росатом», 2023-2024 учебный год,
Олимпиада памяти И.В.Савельева, физика, 11 класс

1 вариант

1. К телу массой m, лежащему на гладком горизонтальном столе, прикреплена легкая пружина с жесткостью k. Второй конец пружины начинают двигать с постоянной скоростью v. Найти максимальную кинетическую энергию тела в процессе движения. Через какое минимальное время после начала движения, кинетическая энергия тела будет максимальной?

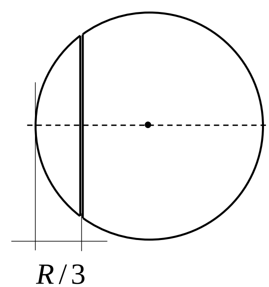


2. При расширении идеального одноатомного газа в некотором процессе его теплоемкость не меняется. При этом газ нагревается и совершает работу A. Известно, что для изохорического охлаждения газа до первоначальной температуры у него нужно забрать количество теплоты $Q = 2A$. Найти молярную теплоемкость газа в первом процессе.

3. Тело падает на землю с высоты h без начальной скорости. Какое расстояние пройдет тело за вторую четверть времени падения до поверхности земли? Силой сопротивления воздуха пренебречь.

4. Вес цилиндрического стакана объемом V равен P_1. В стакан доверху насыпали одинаковые маленькие пенопластовые шарики и стали наливать некоторую жидкость, пока шарики не начали всплывать. В этот момент вес стакана (с жидкостью и шариками) стал равен P_2. Найти плотность пенопласта.

5. От равномерно зараженной зарядом Q сферы радиуса R отрезали сегмент высотой $R/3$. Сегмент удерживают в том же положении, в каком он был, когда был частью сферы (см. рисунок). Какой минимальной силой нужно действовать для этого на сегмент?



Решения

1. Перейдем в систему отсчета, движущуюся относительно земли со скоростью $\vec{v}$, которая направлена в том же направлении, в котором мы тянем пружину. В этой системе отсчета конец пружины покоится, а телу толчком сообщили скорость $\vec{v}$, направленную от конца пружины. Очевидно, что в этой системе отсчета тело совершает гармонические колебания, в которых максимальная величина скорости тела равна v, а направления максимальной скорости чередуются: через половину периода колебаний (через $T/2$, где T - период колебаний) вектор максимальной скорости тела (в рассматриваемой системе отсчета) направлен от тела, еще через половину периода – к телу, еще через полпериода от тела и т.д. А поскольку скорость конца пружины в системе отсчета, связанной с землей, направлена от тела, то через половину периода колебаний $T/2$ скорость тела относительно земли будет равна $2v$, через T - нулю и т.д. Поэтому впервые после начала движения кинетическая энергия тела станет максимальной через время

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

А само максимальное значение кинетической энергии равно

$$E_{кин,\max} = \frac{m(2v)^2}{2} = 2mv^2$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Осуществлен переход в систему отсчета, связанную с концом пружины и доказано, что движение тела есть колебание - 1 балл
2. Доказано, что максимальная скорость тела в этой системе отсчета есть $\pm v$ – 1 балл
3. Утверждение, что в системе отсчета, связанной с землей максимальная скорость тела - $2v$ – 1 балл
4. Правильный ответ для максимальной кинетической энергии тела – 1 балл
5. Правильный ответ для времени, через которое кинетическая энергия достигает максимума – 1 балл.
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Применяем первый закон термодинамики к первому процессу

$$Q_1 = \Delta U_1 + A$$

где Q_1 - количество теплоты, полученное газом в первом процессе, ΔU_1 - изменение внутренней энергии газа в первом процессе (по условию $A > 0$ и $\Delta U_1 > 0$, так как газ рас). С другой стороны, применение первого начала термодинамики к изохорическому охлаждению дает

$$\Delta U_1 = Q$$

(обратим внимание, что по условию Q - это *взятое* у газа в изохорическом охлаждении тепло, поэтому $Q > 0$). А так как $Q = 2A$, из первого закона термодинамики получаем, что

$$Q_1 = 3A$$

Поскольку газ одноатомный, то

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$$

где ΔT - изменение температуры газа в первом процессе, ν - число молей, R - универсальная газовая постоянная. Отсюда

$$\Delta T = \frac{2\Delta U_1}{3\nu R} = \frac{2Q}{3\nu R} = \frac{4A}{3\nu R}$$

Теперь можем найти молярную теплоемкость газа в первом процессе

$$C = \frac{Q_1}{\nu \Delta T} = \frac{9}{4}R$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно использован первый закон термодинамики - 1 балл
2. Правильное использование первого закона термодинамики для изохорического охлаждения – 1 балл
3. Правильное соотношение работы газа и количества теплоты, полученного им в первом процессе – 1 балл
4. Правильное определение молярной теплоемкости – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл.
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. При падении тела с высоты h зависимость его вертикальной координаты y от времени t дается выражением

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

(начало координат находится на поверхности земли, ось y направлена вертикально вверх). Время t_1 падения тела до поверхности земли определяется этой зависимостью из условия, что y-координата тела становится равной нулю:

$$\frac{gt_1^2}{2} = h \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

За первую четверть этого времени тело пройдет расстояние

$$l_1 = h - y\left(\frac{1}{4}t_1\right) = \frac{1}{16}h$$

За две четверти этого времени, отсчитанные от начала движения, тело пройдет расстояние:

$$l_2 = h - y\left(\frac{2}{4}t_1\right) = \frac{1}{4}h$$

За три четверти этого времени, отсчитанные от начала движения, тело пройдет расстояние:

$$l_3 = h - y\left(\frac{3}{4}t_1\right) = \frac{9}{16}h$$

Поэтому за первую, вторую, третью и четвертую четверти времени падения до поверхности земли тело пройдет следующие расстояния Δl_1, Δl_2, Δl_3 и Δl_4 соответственно:

$$\Delta l_1 = l_1 = \frac{1}{16}h\,,\ \Delta l_2 = l_2 - l_1 = \frac{3}{16}h\,,\ \Delta l_3 = l_3 - l_2 = \frac{5}{16}h\,,\ \Delta l_4 = h - l_3 = \frac{7}{16}h$$

В первом варианте нужно было найти расстояние, пройденное за вторую четверть полного времени падения:

$$\Delta l_2 = \frac{3}{16} h$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно использованы законы равноускоренного движения - 1 балл
2. Правильная основная идея – находить нужные расстояния, отсчитанные не от начала движения, через разности расстояний, отсчитанных от начала движения (или правильный «сдвиг» законов равноускоренного движения к новому началу – 1 балл
3. Правильное нахождение полного времени движения – 1 балл
4. Правильное нахождение расстояний, пройденных за одну, две, три или четыре четверти полного времени движения – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл.
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Пусть площадь сечения стакана - S, высота - H. Тогда его объем $V = SH$. По условию вес стакана равен P_1.

Вес стакана с шариками и водой P_2 складывается из веса стакана, шариков и воды. Пусть в тот момент, когда шарики начали всплывать, мы налили в стакан жидкость высотой h. Поскольку действующая на шарики сила Архимеда равна весу вытесненной жидкости, а в момент начала всплытия сила Архимеда равна весу всех шариков, то произведение $\rho_0 gSh$ (ρ_0 - плотность жидкости) равно суммарному весу жидкости и всех шариков. Поэтому

$$P_2 = P_1 + \rho_0 ghS \qquad (*)$$

С другой стороны, в момент всплывания шариков действующая на них сила Архимеда равна силе тяжести. Поэтому

$$\rho_0 g V_{в\ жидк.} = \rho g V_ш$$

где $V_{в\ жидк.}$ - объем шариков, находящихся в жидкости, $V_ш$ - объем всех шариков, ρ - плотность шариков. Отсюда

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V_ш}{V_{в\ жидк.}}$$

Но поскольку шариков много и они маленькие, то отношение объема всех шариков к объему шариков, находящихся в жидкости равно отношению высот насыпки шариков в стакан (т.е. H) к высоте уровня воды в стакане h:

$$\frac{V_ш}{V_{в\ жидк.}} = \frac{H}{h}$$

Отсюда находим

$$\rho_0 = \frac{H}{h} \rho$$

Подставляя плотность жидкости в формулу (*), находим

$$\rho gHS = P_2 - P_1$$

и

$$\rho = \frac{P_2 - P_1}{gV}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное условие равновесия стакана с шариками - 1 балл
2. Правильное нахождение веса стакана с шариками и водой в момент всплытия шариков – 2 балла
3. Правильное соотношение объема шариков и объема воды в стакане – 1 балл
4. Правильный ответ – 1 балл.
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Очевидно, что минимальная сила, которую нужно приложить к сегменту (и остальной части сферы) равна силе отталкивания сегмента от остальной части сферы. Найдем эту силу. Для этого рассмотрим очень маленький элемент площадью ΔS поверхности равномерно заряженной зарядом Q сферы радиуса R и найдем, с какой силой этот элемент отталкивается от остальной сферы. Поскольку этот элемент очень мал, то действующую на него силу можно представить как

$$F = \Delta Q\, E_{o.c.}$$

где ΔQ - заряд этого элемента, $E_{o.c.}$ - напряженность электрического поля остальной сферы в тех точках, в которых находится элемент ΔS. Заряд ΔQ легко найти из условия равномерной заряженности сферы. Действительно, поскольку сфера заряжена равномерно, величина заряда элемента ΔS во столько же раз меньше заряда всей сферы, во сколько ΔS меньше площади поверхности сферы $S = 4\pi R^2$:

$$\Delta Q = \frac{\Delta S}{4\pi R^2} Q$$

Напряженность электрического поля остальной сферы в точках, где расположен элемент ΔS можно найти из следующих соображений. С одной стороны, электрическое поле сферы во всех точках складывается из электрического поля, создаваемого рассматриваемым элементом ΔS и остальной сферой

$$\vec{E} = \vec{E}_{\Delta S} + \vec{E}_{o.c.}$$

С другой стороны, электрическое поле сферы вблизи элемента ΔS снаружи сферы равно

$$E = \frac{kQ}{R^2}$$

($k = \left(4\pi\varepsilon_0\right)^{-1}$ - постоянная закона Кулона), внутри сферы – равно нулю. А поскольку электрические поля, создаваемые элементом ΔS снаружи и внутри сферы одинаковы по величине и противоположно направлены (по и против радиуса сферы, проведенного из центра в ту точку, где расположен элемент ΔS), то поле остальной полусферы в точках, где расположен элемент ΔS, равно половине поля сферы вблизи ее поверхности снаружи сферы

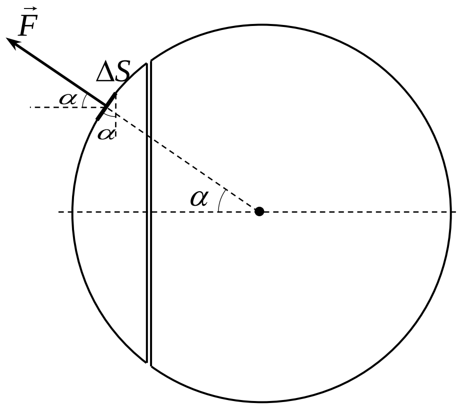
$$E_{o.c.} = \frac{kQ}{2R^2}$$

Поэтому сила, действующая на элемент ΔS со стороны остальной сферы, по величине равна

$$F = \frac{\Delta S}{4\pi R^2} Q \frac{kQ}{2R^2} = \frac{\Delta S Q^2}{2(4\pi)^2 \varepsilon_0 R^4}, \quad (1)$$

и направлена по радиусу сферы из центра (элемент ΔS отталкивается от остальной сферы).

Используя эту формулу можно найти и силу, действующую на сегмент сферы. Для этого мысленно разобьем сегмент на малые площадки, найдем силы, действующие на каждую площадку, просуммируем векторы сил. При этом для силы, действующей на каждую площадку, можно использовать формулу (1), дающую силу ее взаимодействия со всей сферой, а не только с оставшейся после отрезания сегмента части. Это связано с тем, что после суммирования силы, действующие между площадками отрезанного сегмента, сократятся по третьему закону Ньютона. И поскольку сила, действующая на отрезанный сегмент, направлена по его оси (это следует из симметрии задачи), то можно суммировать не векторы сил, а их проекции на ось сегмента.



Итак, рассмотрим малую площадку сегмента площадью ΔS, которую видно из центра сферы под углом α к оси сегмента (см. рисунок; рассматриваемая площадка выделена жирным). Она отталкивается от остальной сферы силой (1), поэтому суммарная сила, действующая на сегмент, равна сумме проекций на ось сегмента всех сил, действующих на площадки сегмента

$$F_{рез} = \sum F \cos\alpha$$

где $F_{рез}$ - результирующая сила, действующая на сегмент, суммирование осуществляется по всем площадкам сегмента. Используя формулу (1), получим

$$F_{рез} = \sum \frac{\Delta S Q^2}{2(4\pi)^2 \varepsilon_0 R^4} \cos\alpha$$

Поскольку множители Q^2, $(4\pi)^2$, ε_0 и R^4 одинаковы у каждого слагаемого суммы, их можно вынести за скобку (за знак суммы). В результате получим

$$F_{рез} = \sum \frac{\Delta S Q^2}{2(4\pi)^2 \varepsilon_0 R^4} \cos\alpha = \frac{Q^2}{2(4\pi)^2 \varepsilon_0 R^4} \sum \Delta S \cos\alpha$$

Но величина $\Delta S \cos\alpha$ имеет смысл проекции площади рассматриваемой площадки на основание сегмента. Поэтому сумма таких величин дает площадь основания сегмента. Так как площадь основания сегмента равна

$$S = \pi\left(R^2 - (R-h)^2\right) = \pi h(2R - h)$$

то для силы, с которой сегмент отталкивается от остальной части сферы (и соответственно для минимальной силы, которой нужно удерживать сегмент, имеем окончательно

$$F_{рез} = \frac{Q^2 h(2R-h)}{32\pi\varepsilon_0 R^4}$$

где h - высота сегмента. Для $h = R/3$ получаем

$$F_{рез} = \frac{5Q^2}{288\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{5kQ^2}{72R^2}$$

где $k = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$ - постоянная закона Кулона.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильная идея решения – использование принципа суперпозиции для нахождения силы, действующей на каждую маленькую площадку, входящую в состав сегмента, со стороны остальной сферы и суммирование этих сил - 1 балл

2. Правильное нахождение напряженности электрического поля в области каждого малого элемента отрезанного сегмента – 1 балл

3. Доказательство, что суммировать нужно только проекции сил на ось сегмента и того факта, что можно суммировать проекции сил, действующих со стороны всей сферы, а не только той части, которая осталась после отрезания сегмента – 1 балл

4. Правильное сведение суммирования сил к суммированию проекций площадей элементов на круг, «замыкающий» сегмент – 1 балл

5. Правильный ответ – 1 балл.

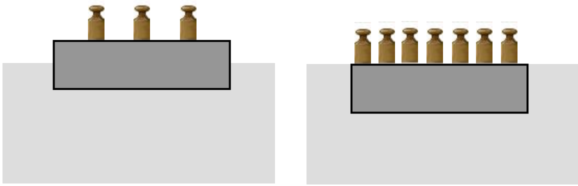
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы

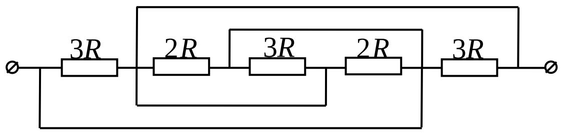
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.

Решения и критерии оценивания
Отборочный тур олимпиады «Росатом» и Инженерной олимпиады школьников на региональных площадках, комплект 1
2023-2024 учебный год,
физика, 11 класс

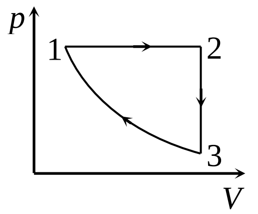
1. На поверхности воды плавает брусок из пенопласта в форме прямоугольного параллелепипеда. Когда на поверхность бруска поставили три одинаковые гири, он погрузился в воду на половину своего объема. А когда на поверхность бруска поставили 7 точно таких же гирь, то его верхняя грань оказалась на одном уровне с поверхностью воды. Найти отношение плотности пенопласта к плотности воды.



2. Найти сопротивление электрической цепи, схема которой показана на рисунке. Известно, что $R=10$ Ом. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

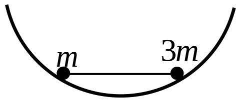


3. С одним молем одноатомного идеального газа происходит циклический процесс 1-2-3-1, состоящий из изобары 1-2, изохоры 2-3 и изотермы 3-1 (см. рисунок, на котором приведена зависимость давления газа от его объема для данного процесса). Известно, что работа, совершенная над газом в изотермическом процессе, составляет 3/4 от работы газа в изобарическом процессе. Найти термодинамический КПД циклического процесса 1-2-3-1.



4. Толстую металлическую пластину, заряженную зарядом $q/2$, расположили параллельно тонкой металлической пластинке, заряженной зарядом q (см. рисунок). Найти заряды верхней и нижней поверхностей толстой металлической пластины. Размеры пластин много больше толщины металлической пластины и расстояния между пластинами.

5. К концам жесткого невесомого стержня прикреплены два точечных тела с массами m и $3m$. Стержень удерживают в горизонтальном положении в сферической лунке, радиус которой равен длине стержня (см. рисунок). В некоторый момент времени стержень отпускают. Найти ускорение центра стержня и силу его натяжения сразу после освобождения. Трение отсутствует.



Решения и критерии оценивания решений задач

1. Пусть масса бруска M, объем бруска - V, масса одной гирьки - m. Тогда условие равновесия бруска с тремя гирьками и с семью гирьками дают

$$Mg + 3mg = \rho_0 g \frac{V}{2}$$
$$Mg + 7mg = \rho_0 gV$$

где ρ_0 - плотность воды. Умножая первое уравнение на 7, второе – на 3 и вычитая второе уравнение из первого, получим

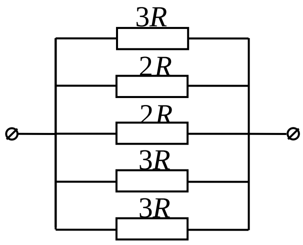
$$4M = \frac{1}{2}\rho_0 V$$

А поскольку $M = \rho V$, где ρ - плотность пенопласта, отсюда получаем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{8} = 0,125$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное условие плавание бруска с тремя гирьками – 1 балл
2. Правильное условие плавание бруска с семью гирьками - 1 балл
3. Правильно найдена масса бруска через его объем и плотность воды – 1 балл
4. Правильный ответ (формула и число) для отношения плотности бруска к плотности воды – 2 балла
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. С помощью деформации соединительных проводов (что не меняет сопротивления исходной цепи) данную в условии электрическую цепь можно привести к такому виду, из которого очевидно, что резисторы соединены параллельно (см. рисунок). Поэтому общее сопротивление $R_{об}$ этой цепи можно найти как



$$\frac{1}{R_{об}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} \quad \Rightarrow \quad R_{об} = \frac{R}{2}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильные формулы для сложения сопротивлений – 1 балл
2. Правильная эквивалентная схема цепи – все резисторы соединены параллельно - 2 балла
3. Правильный ответ (формула) для эквивалентного сопротивления – 1 балл
4. Правильный ответ (число) для эквивалентного сопротивления – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Пусть работа газа в изобарическом процессе равна A_p. Как известно, количество теплоты, полученное одноатомным идеальным газом в изобарическом расширении, составляет 5/2 работы газа в этом процессе. Поэтому количество теплоты Q_p, полученное газом в изобарическом процессе, равно

$$Q_p = \frac{5}{2} A_p$$

При этом в рассматриваемом цикле газ получал тепло только на этом участке (на двух остальных он тепло отдавал), поэтому количество теплоты Q, полученное в течение цикла от нагревателя, равно Q_p:

$$Q = Q_p = \frac{5}{2} A_p$$

Так как в изохорическом процессе газ не совершал работы, работа A газа за цикл равна

$$A = A_p - A_T$$

где A_T - работа, совершенная над газом в изотермическом процессе, которая по условию составляет 3/4 от работы газа в изобарическом процессе:

$$A_T = \frac{3}{4} A_p .$$

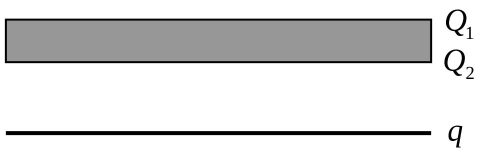
В результате для работы газа за цикл имеем

$$A = A_p - \frac{3}{4} A_p = \frac{1}{4} A_p .$$

Согласно определению термодинамический КПД циклического процесса есть отношение работы газа за цикл к количеству теплоты, полученному газом от нагревателя в течение цикла. Поэтому для рассматриваемого процесса имеем

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{(1/4) A_p}{(5/2) A_p} = \frac{1}{10}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Использована правильная формула для КПД теплового двигателя – 1 балл
2. Правильная связь работы одноатомного идеального газа в изобарическом процессе и полученного им в этом процессе количества теплоты - 1 балл
3. Правильно найдена работа газа за цикл – 1 балл
4. Правильно найдено количество теплоты, полученное газом в течение цикла – 1 балл
5. Правильный ответ для КПД цикла – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.



4. Пусть на верхней и нижней поверхностях металлической пластины индуцированы заряды Q_1 и Q_2 (см. рисунок). Из закона сохранения заряда имеем очевидное условие

$$Q_1 + Q_2 = \frac{q}{2} \qquad (1)$$

(причем в эту формулу заряды входят «со своими знаками», не модули).

Далее. Величина напряженности электрического поля равномерно заряженной пластины определяется соотношением

$$E = \frac{Q}{2S\varepsilon_0}$$

(Q - модуль заряда пластины, S - ее площадь, ε_0 - электрическая постоянная), а направлен вектор $\vec{E}$ от пластины, если $Q > 0$, и к пластине, если $Q < 0$. Поэтому проекция E_x вектора напряженности электрического поля пластины на ось x, перпендикулярную пластине, может быть записана как

$$E_x = \pm \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \qquad (2)$$

причем знак «+» берется для проекции напряженности поля с той стороны пластины, куда направлена ось x, «-» - с противоположной, а заряд входит «со своим знаком» (не модуль!). В справедливости формулы (2) можно убедиться непосредственной проверкой.

Условием равновесия зарядов в проводнике является равенство нулю напряженности электрического поля внутри проводника. Поэтому в равновесии внутри металлической пластины $E = 0$. Поскольку поле внутри пластины создается тремя заряженными плоскостями – пластинкой с зарядом q, зарядами верхней и нижней поверхностями металлической пластины Q_1 и Q_2, из формулы (2) имеем

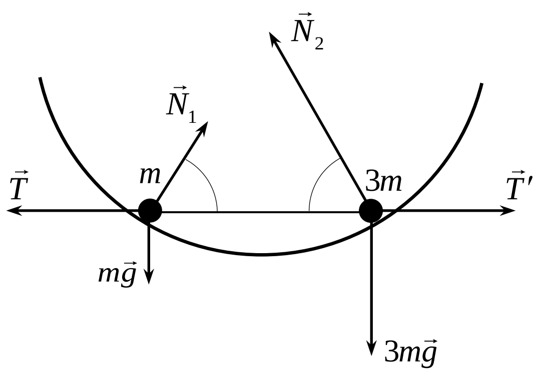
$$\frac{q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} = 0 \qquad (3)$$

причем в формулу (3) также как и в формулу (1) входят заряды «со своими знаками» (не модули). Решая систему двух уравнений (1), (3) относительно неизвестных Q_1 и Q_2, получим

$$Q_1 = \frac{3q}{4}, \qquad Q_2 = -\frac{q}{4}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно использован закон сохранения заряда – 1 балл
2. Правильная формула для напряженности поля заряженной плоскости - 1 балл
3. Правильное условие равновесия электрических зарядов в проводнике – 1 балл
4. Правильная система уравнений для зарядов поверхностей пластинки – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. На тела действуют силы тяжести, силы реакции стенок лунки и силы натяжения стержня. А так как стержень не имеет массы, то сумма сил и моментов сил, действующих на стержень со стороны тел, должны равняться нулю. Поэтому эти силы могут быть направлены только вдоль стержня. Силы, действующие на тела, показаны на рисунке, причем величины сил $\vec{T}$ и $\vec{T}'$ равны. Так как в первый момент после отпускания скорости тел равны нулю, то ускорения тел сонаправлены скоростям. Поэтому ускорения тел направлены параллельно поверхности лунки – вверх для тела массой m и вниз для тела массой $3m$. Далее. Поскольку длина стержня равна радиусу лунки, то углы, отмеченные дугами на рисунке, равны $60°$. Поэтому проекция второго



закона Ньютона на оси, направленные вдоль поверхности лунки (вверх для первого тела, вниз для второго) дает

$$ma_1 = T\cos(30°) - mg\cos(60°)$$
$$3ma_2 = 3mg\cos(60°) - T\cos(30°)$$

где a_1 - ускорение тела массой m, a_2 - ускорение тела массой $3m$. Поскольку стержень нерастяжим, то проекции скоростей (и ускорений) его концов на направление стержня одинаковы

$$a_1\cos(30°) = a_2\cos(30°) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2$$

В результате из второго закона Ньютона получаем

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{4}g, \qquad T = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

Очевидно, ускорение a_c центра стержня следующим образом связано с ускорениями его концов

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{2}$$

А так как перпендикулярные проекции векторов ускорений имеют разные знаки, то вектор ускорения центра стержня направлен вдоль стержня в сторону легкого тела и имеет величину

$$a_c = a_1\cos(30°) = a_2\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{8}g$$

В результате имеем окончательно

$a_c = \frac{\sqrt{3}}{8}g$, направлено горизонтально в сторону легкого тела, $T = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$, стержень сжат.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно определены (и обоснованы) направления сил натяжения стержня, действующих на шарики – 1 балл
2. Правильный второй закон Ньютона для шариков - 1 балл
3. Правильная связь ускорений шариков сразу после отпускания стержня – 1 балл
4. Правильно найдены ускорения шариков и сила натяжения стержня – 1 балл
5. Правильный ответ для ускорения центра стержня – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.

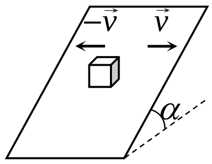
Решения и критерии оценивания
Отборочный тур олимпиады «Росатом» и Инженерной олимпиады школьников на региональных площадках,
2023-2024 учебный год, 2 комплект
физика, 11 класс

1. Маленькое тело движется по периметру квадрата со стороной d. Ускорение тела по величине не превосходит значения a (в том числе и при поворотах в вершинах квадрата). За какое минимальное время тело может совершить 2 полных обхода всего периметра?

2. Две концентрические металлические сферы радиусами R и $3R$ заряжены зарядами Q и $-4Q$ соответственно. Затем малую сферу заземляют с помощью проводника ничтожно малой емкости через малое отверстие в большой сфере. Какой заряд протечет по проводнику в направлении от малой сферы к земле.

3. На столе стоит открытый сверху цилиндрический сосуд высотой h. В сосуд опускают поршень массой m, создающий избыточное давление, равное атмосферному (т.е. $mg = p_0 S$, p_0 - атмосферное давление, S - площадь сосуда). После того как поршень остановится, а температура воздуха под ним сравняется с окружающей температурой, в сосуд опускают второй поршень, затем третий и т.д. Найти расстояние между вторым и третьим поршнем после того, как в сосуд опустили десять поршней. Поршни закрывают сосуд герметично.

4. Тело аккуратно положили на длинную наклонную плоскость с углом наклона к горизонту α. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ ($\mu > \mathrm{tg}\,\alpha$). Затем плоскость стали двигать так, что она с большой частотой меняет свою скорость $\vec{v}$ на противоположную $-\vec{v}$ (см. рисунок). Найти установившуюся скорость движения тела.



5. Из цилиндрической заготовки радиуса R, высотой h токарь вырезает цилиндр радиуса $3R/4$, снимая металл за один проход. На какое максимальное расстояние смещается центр тяжести заготовки в процессе ее обработки?

Решения

1. Чтобы время прохода было минимальным, у тела должна быть максимальная скорость, но при повороте в вершине (поскольку радиус поворота $\to 0$) $a \to \infty$, если только скорость тела не равна нулю. Поэтому в вершинах тело должно иметь нулевую скорость. Поэтому тело будет двигаться так. Стартуя из вершины с нулевой начальной скоростью, тело разгоняется с максимальным ускорением до середины стороны, а затем тормозит с максимальным ускорением, чтобы попасть в вершину с нулевой скоростью. Поэтому время достижения середины стороны находится из уравнения

$$\frac{l}{2} = \frac{at_0^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t_0 = \sqrt{\frac{l}{a}} \tag{*}$$

Время прохождения стороны квадрата – вдвое больше, периметра – в восемь раз больше, а двух периметров – в шестнадцать раз больше времени (*)

$$t = 16t_0 = 16\sqrt{\frac{l}{a}}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная идея решения – скорость тела в вершинах должна равняться нулю – 1 балл
2. Правильные законы равноускоренного движения – 1 балл
3. Правильное уравнение для времени прохождения одной стороны – 1 балл
4. Правильный ответ – 2 балла.

2. После заземления потенциал малой сферы станет равным нулю. Поэтому для нового заряда малой сферы q справедливо условие

$$\frac{kq}{R} - \frac{4kQ}{3R} = 0$$

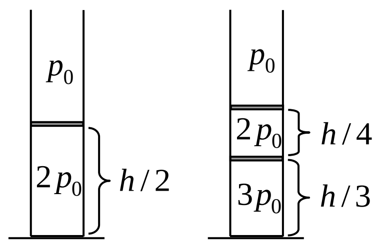
где k - постоянная закона Кулона. Отсюда

$$q = \frac{4Q}{3}$$

и, следовательно, от малой сферы к земле протечет заряд

$$\Delta q = Q - q = -\frac{Q}{3}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная идея решения – равенство нулю потенциала заземленной сферы - 1 балл
2. Правильная формула для потенциала заряженной сферы – 1 балл
3. Правильно использован принцип суперпозиции для нахождения потенциала внутренней сферы – 1 балл
4. Правильный заряд внутренней сферы – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл.



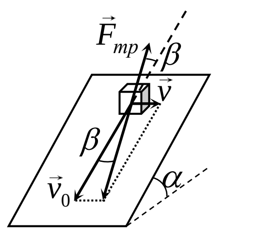
3. Когда в сосуд опускают первый поршень, он закрывает в сосуде такое количество воздуха при атмосферном давлении, которое занимало весь сосуд. После остановки первого поршня давление этого воздуха вырастает вдвое ($2p_0$), что означает, что первый поршень останавливается первый раз посередине сосуда (на расстоянии $h/2$ от его верха). Поэтому второй поршень закрывает в сосуде такое количество воздуха при атмосферном давлении, которое занимает половину сосуда. А так как давление воздуха между первым и вторым поршнем после остановки второго поршня должно стать равным $2p_0$, расстояние между первым и вторым поршнем в этот момент будет равно $h/4$. Давление воздуха под первым поршнем в этот момент будет равно $3p_0$. Это значит, что расстояние между дном сосуда и первым поршнем в этот момент будет равно $h/3$. Отсюда следует, что третий поршень закрывает в сосуде столб воздуха высотой

$$h-\frac{h}{3}-\frac{h}{4}=\frac{5h}{12}.$$

После того как в сосуд опустят 10 поршней, давление воздуха под третьим поршнем будет равно $9p_0$, т.е. увеличится в 9 раз по сравнению с атмосферным. Поэтому объем этого воздуха уменьшится в 9 раз. Следовательно, расстояние между вторым и третьим поршнем будет равно

$$h_{2-3}=\frac{5h}{108}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно найдено положение первого поршня и давление под ним до опускания второго поршня - 1 балл
2. Правильно найдено положение первого поршня и давление под ним после опускания в сосуд второго поршня – 1 балл
3. Правильно найдено положение второго поршня и давление под ним до опускания третьего – 1 балл
4. Правильная цепочка расстояний между поршнями после опускания в сосуд 10 поршней – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл.



4. Пусть установившаяся скорость тела v_0, которая направлена вниз вдоль плоскости. Но относительно плоскости тело будет двигаться под некоторым углом β к направлению наибыстрейшего спуска (в течение половины периода в одну сторону, в течение другой половины – в другую). Сила трения, действующая на тело со стороны плоскости, противоположна скорости тела относительно плоскости. Поэтому сила трения также направлена под углом β к направлению наибыстрейшего спуска (но вверх). В установившемся режиме проекция силы трения на направление наибыстрейшего спуска компенсирует составляющую силы тяжести вдоль плоскости - $mg\sin\alpha$

$$\mu mg\cos\alpha\cos\beta = mg\sin\alpha$$

Отсюда

$$\cos\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu} \qquad (*)$$

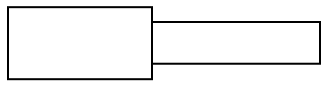
А поскольку

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{v_0}$$

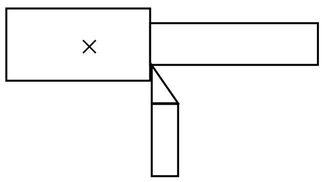
из формулы (*) находим

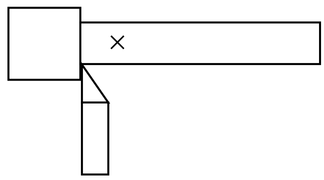
$$v_0 = \frac{v \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Использование правильной формулы для силы трения на наклонной плоскости – 1 балл
2. Правильная идея решения – в установившемся режиме тело будет спускаться в направлении наибыстрейшего спуска с постоянной скоростью, а проекция силы трения на это направление будет компенсировать проекцию силы тяжести $mg\sin\alpha$ - 2 балла
3. Правильное условие установившегося режима – 1 балл
4. Правильный ответ – 1 балл.

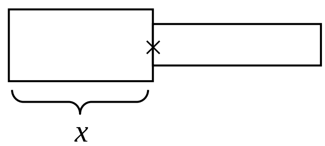


5. В процессе обработки заготовка представляет собой два состыкованных соосных цилиндра с радиусами R и $3R/4$ (см. рисунок). И центр тяжести заготовки в процессе ее обработки смещается, поскольку до обработки центр тяжести заготовки находится посередине, а, например, в положении, показанном на рисунке, центр тяжести заготовки находится левее ее середины. Докажем, что максимальным смещение центра тяжести будет в таком положении, в котором центр тяжести совпадает с положением резца (стыка между двумя частями заготовки).





Действительно, пусть центр тяжести находится левее положения резца (стыка частей; см. левый рисунок, положение центра тяжести показано крестиком). Если в этом положении резец срежет какой-то небольшой объем заготовки, то ее центр тяжести сместится влево, поскольку мы уменьшаем часть заготовки справа от центра тяжести. Если центр тяжести находится слева от резца (правый рисунок), то при дальнейшей обработке заготовки центр тяжести будет перемещаться вправо. Т.о. пока резец при обработке заготовки с правого конца не «дошел» до ее центра тяжести, центр тяжести движется влево, когда «перешел» - вправо. Это значит, что максимальным смещение центра тяжести будет тогда, когда он совпадает с резцом.



Найдем из этого условия максимальное смещение центра тяжести. Пусть центр тяжести совпадает со стыком частей заготовки (тогда он максимально смещен от ее центра) и находится на расстоянии x от ее левого конца (см. рисунок). Тогда

$$m_л \frac{x}{2} = m_п \frac{l-x}{2}$$

где $m_л$ и $m_п$ - массы правой и левой частей. Отсюда

$$\rho\pi R^2 x\frac{x}{2}=\rho\pi\left(\frac{3R}{4}\right)^2(l-x)\frac{l-x}{2}$$

где ρ - плотность материала заготовки. Отсюда

$$x=\frac{3l}{7}$$

Это значит, что максимальное смещение центра тяжести заготовки при обработке

$$\Delta x=\frac{l}{2}-\frac{3l}{7}=\frac{l}{14}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная идея решения – от начала до конца обработки центр тяжести «вернется» в середину детали – поэтому в процессе обработки есть максимальный сдвиг центра тяжести - 1 балл
2. Правильная формула для нахождения центра тяжести тела, состоящего из двух однородных стержней разного диаметра – 1 балл
3. Правильно найден максимум смещения центра тяжести (через производную, или как в приведенном выше решении) - 1 балл
4. Правильный ответ – 2 балла

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.