

Решения и критерии оценивания решений задач

1. Из уравнения реакции видим, что чтобы в смеси молекулярного водорода и азота реакция прошла полностью, нужно, чтобы количество вещества азота было вдвое меньше количества вещества водорода. А у нас оно вдвое больше. Поэтому на реакцию соединения водорода и азота будет израсходовано все количество вещества водорода и одна треть моля азота (а два и две третьих моля азота не прореагируют). Следовательно, азот находится в избытке, водород в недостатке.

При этом образуется такое количество вещества аммиака, которое вдвое больше количества вещества азота, вступившего в реакцию (это тоже следует из уравнения реакции). Это значит, что количество вещества аммиака в сосуде будет составлять две трети моля.

Таким образом, всего в сосуде будут находиться две трети моля аммиака и два и две третьих моля азота - т.е. всего десять третьих моля различных веществ. А поскольку первоначально в сосуде находилось 4 моля, то количество молекул в сосуде после прохождения реакции составляет величину

$$n = \frac{10/3}{4} = \frac{5}{6}$$

от первоначального, т.е. уменьшится в 6/5 раза.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Школьник понимает, что такое моль - 1 балл
2. Правильный вывод о том, какое вещество находится в избытке, какое в недостатке – 1 балл
3. Правильно найдено количество вещества азота, оставшееся в сосуде – 1 балл
4. Правильно найдено количество вещества аммиака, образовавшегося в сосуде - 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

(Решение задачи 1 варианта 3)

1. Пусть масса поплавок m , объем V . Тогда условие плавания поплавок с леской и грузом дает

$$mg + T = \rho g \frac{4}{5} V$$

где T - сила натяжения лески, ρ - плотность воды. Для свободно плавающего поплавок условие плавания дает

$$mg = \rho g \frac{1}{6} V$$

Деля эти равенства друг на друга, получим

$$\frac{mg + T}{mg} = \frac{24}{5}$$

Решая это уравнение, найдем

$$T = \frac{19}{5} mg = 0,76 \text{ Н}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное использование формулы для выталкивающей силы Архимеда - 1 балл
2. Правильное условие плавания поплавок с леской – 1 балл
3. Правильное условие плавания свободно плавающего поплавок – 1 балл
4. Правильное уравнение для силы натяжения лески – 1 балл
5. Правильный ответ (и формула, и число) – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.)

2. Поскольку вольтметр всегда показывает напряжение на самом себе, а во втором случае через него течет меньший ток, то во втором случае (в случае последовательного соединения с резистором) его показание будут меньше.

Пусть сопротивление вольтметра R , сопротивление резистора r , напряжение источника U . В первом случае вольтметр показывает напряжение источника $U_1 = U$.

Чтобы найти показания вольтметра во втором случае найдем ток I_2 , текущий через него во втором случае, а затем и напряжение U_2 на вольтметре во втором случае. Имеем

$$I_2 = \frac{U}{r + R}, \quad U_2 = I_2 R = \frac{UR}{r + R} = \frac{U}{\frac{r}{R} + 1}$$

Так как напряжение во втором случае есть треть напряжения в первом, получаем

$$U_2 = \frac{U_1}{3} = \frac{U}{3} \Rightarrow \frac{U}{3} = \frac{U}{\frac{r}{R} + 1}$$

Сокращая здесь напряжение источника и решая полученное уравнение относительно отношения сопротивлений, найдем отношение сопротивлений

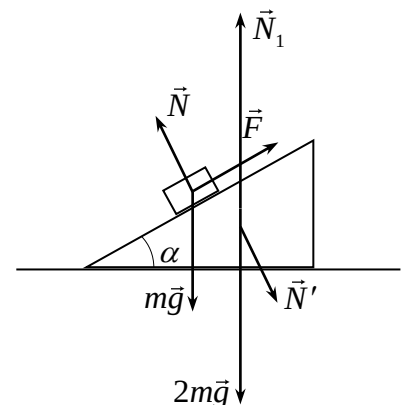
$$\frac{r}{R} = 2$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное утверждение (с обоснованием), что показания вольтметра во втором случае меньше - 1 балл
2. Правильные показания источника в первом случае – 1 балл
3. Правильные показания источника во втором случае – 1 балл
4. Правильное уравнение для отношения сопротивлений – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. На тело действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции поверхности клина $\vec{N}$, внешняя сила $\vec{F}$. На клин действуют: сила тяжести $2m\vec{g}$ (по условию масса клина вдвое больше массы тела), сила реакции со стороны тела $\vec{N}'$, сила реакции горизонтальной поверхности $\vec{N}_1$ (эти силы показаны на рисунке). Поскольку ускорение тела горизонтально, то оно равно ускорению клина. Поэтому второй закон Ньютона для тела и клина в проекциях на горизонтальную ось дает



$$ma = F \cos \alpha - N \sin \alpha$$

$$2ma = N \sin \alpha$$

А в проекциях на вертикальную ось для тела –

$$mg = F \sin \alpha + N \cos \alpha$$

Умножая первое уравнение на 2 и вычитая его из второго, получим

$$2F \cos \alpha = 3N \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad N = \frac{2F \cos \alpha}{3 \sin \alpha}$$

Теперь подставляя силу реакции в третье уравнение, найдем

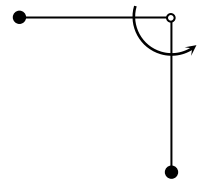
$$F = \frac{3mg \sin \alpha}{2 + \sin^2 \alpha} = \frac{2}{3} mg$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

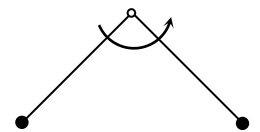
1. Правильное (и обоснованное) утверждение, что ускорения тела и клина равны - 1 балл
2. Правильно расставлены силы, действующие на тело и клин – 1 балл
3. Правильный второй закон Ньютона для тела и клина в проекциях на горизонтальное направление – 1 балл
4. Правильный второй закон Ньютона для тела в проекциях на вертикальное направление – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Два шарика одинаковой массы m закреплены на концах легкого стержня длиной $2L$, согнутого в середине под прямым углом (см. рисунок). Через вершину этого угла перпендикулярно плоскости чертежа проходит горизонтальная ось вращения. Стержень удерживают так, что одна его часть горизонтальна, вторая вертикальна, а потом отпускают. Найти максимальную скорость шариков в процессе последующего движения. Силой сопротивления воздуха и другими неупругими процессами пренебречь.



4. Ясно, что у этой системы есть положение равновесия – стержни расположены симметрично по отношению к вертикали, проходящей через ось вращения. Т.е. углы между стержнями и вертикалью равны 45° . Скорость шариков будет максимальной в тот момент, когда шарики будут проходить положение равновесия – в этом положении минимальна потенциальная энергия, значит, максимальна кинетическая. Найдем изменение потенциальной энергии системы шариков, а потом воспользуемся законом сохранения энергии.



Пусть уровень отсчета потенциальной энергии системы совпадает с начальным положением нижнего шарика. Тогда потенциальная энергия системы в начальном положении равна $\Pi_n = mgL$. В конечном положении каждый из шариков будет находиться на высоте

$$L - L \cos 45^\circ = \frac{L(2 - \sqrt{2})}{2}$$

над началом отсчета потенциальной энергии, и потому потенциальная энергия системы в этом положении будет равна

$$\Pi_k = mgL(2 - \sqrt{2})$$

Поэтому изменение потенциальной энергии системы равно

$$\Delta \Pi = \Pi_k - \Pi_n = mgL(\sqrt{2} - 1)$$

Используя теперь закон сохранения энергии для нашей системы тел и учитывая, что скорости шариков одинаковы, найдем

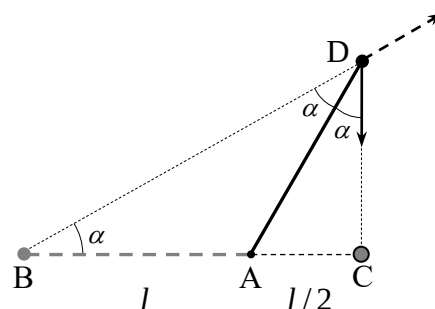
$$2 \frac{mv^2}{2} = \Delta\P \quad \Rightarrow \quad mv^2 = mgL(\sqrt{2} - 1) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL(\sqrt{2} - 1)}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное и обоснованное утверждение, что скорость шариков максимальна, когда стержни составляют угол 45° с вертикалью - 1 балл
2. Использование закона сохранения энергии для системы шариков – 1 балл
3. Правильно найдены начальная и конечная потенциальная энергии системы шариков – 1 балл
4. Правильное уравнение закона сохранения энергии – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Сразу после толчка нить перестанет быть натянутой, и не будет оказывать сопротивления движению тела. Поэтому тело будет двигаться прямолинейно под углом α к первоначальному направлению нити (вдоль прямой BD на рисунке) с постоянной скоростью до того момента, когда нить снова натянется в точке D (на рисунке начальное положение нити показано светлым пунктиром). В этот момент на короткое



время нить натянется, возникнет сила натяжения, которая изменит скорость тела. При этом, поскольку сила натяжения направлена вдоль нити, она изменяет только составляющую скорости тела, направленную вдоль нити, но не изменяет составляющую скорости, перпендикулярную нити. Поскольку нить упругая, то потеря механической энергии тела после натяжения нити не происходит, и составляющая скорости тела, направленная вдоль нити, после ее растяжения меняется на противоположную. А это значит, что углы между скоростью тела и положением нити в момент ее натяжения до и после натяжения будут одинаковы (скорость тела до натяжения нити показана пунктирным вектором, после натяжения – сплошным вектором). После этого тело сойдет нить, и далее будет двигаться прямолинейно. Чтобы оно попало в лунку, после натяжения нити оно должно двигаться вдоль прямой DC.

Поскольку треугольник BAD равнобедренный (его стороны AB и AD равны длине нити), то $\angle ABD = \angle BDA = \alpha$ (см. рисунок). Угол ADC также равен α , поскольку (как это доказано выше) после натяжения нити угол между нитью и вектором скорости не меняется: $\angle ADC = \alpha$. А так как сумма углов в треугольнике равна 180° , то угол BAD равен $180^\circ - 2\alpha$. Значит, угол DAC равен 2α , а $\angle ACD = 180^\circ - 3\alpha$. Поэтому по теореме синусов для треугольника ACD имеем

$$\frac{l}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{l/2}{\sin \alpha}$$

или

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 3\alpha \quad (*)$$

Решения этого уравнения можно найти подбором. Очевидно, решениями являются

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 180^\circ, \quad \alpha_3 = 30^\circ$$

(то, что это корни уравнения, проверяется непосредственной подстановкой). Первый и второй корни не подходят. Действительно, корень $\alpha_1 = 0$ отвечает толчку тела вдоль нити. Но при таком движении тело попадет в лунку раньше, чем оно натянет нить один раз, и потому не выполнено условие однократного натяжения нити за исключением начального. Корень $\alpha_2 = 180^\circ$ отвечает толчку противоположно начальному положению нити, что означает, что нить перед попаданием тела в лунку будет натянута только один раз, но этот «раз» совпадает с начальным. Поэтому для этого корня условие попадания при однократном натяжении нити за исключением начального не выполнено. В промежутке между этими корнями существует только один корень уравнения, поскольку угол, под которым расположена траектория тела после натяжения нити, меняется в зависимости от угла, под которым толкнули тело, монотонно (см. рисунок). Это и означает, что три перечисленных корня (из которых подходит только один) исчерпывают все решения уравнения. Уравнение (*) можно решить и непосредственно, воспользовавшись формулой сложения $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha)$, а затем формулами для синуса и косинуса двойного угла. Это решение приводит к тем же корням, которые перечислены выше. Таким образом, для попадания в лунку при однократном натяжении нити (за исключением начального) тело нужно толкнуть под углом

$$\alpha = 30^\circ$$

к первоначальному расположению нити.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

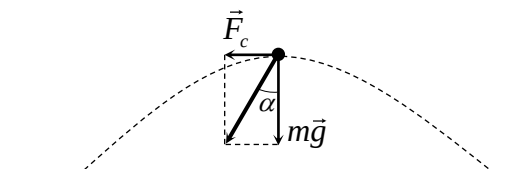
1. Правильное (и обоснованное) утверждение, что после натяжения нити тело будет двигаться с такой же по величине скоростью под тем же углом α к нити - 1 балл
 2. Правильное применение теоремы синусов к треугольнику между нитью, траекторией и направлением на лунку – 1 балл
 3. Правильное уравнение для угла – 1 балл
 4. Правильное решение (все три корня) – 1 балл
 5. Правильное отбрасывание двух корней. Правильный ответ – 1 балл
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.

Решения и критерии оценивания решений задач

1. Поскольку ускорение тела больше ускорения свободного падения, на него действует сила сопротивления воздуха, направленная в верхней точке траектории параллельно поверхности земли (противоположно скорости). На рисунке



показаны силы, действующих на тело в верхней точке траектории – сила тяжести, сила сопротивления воздуха и их равнодействующая (жирным). Поэтому модуль второго закона Ньютона для тела в верхней точке дает

$$ma = \sqrt{(mg)^2 + (F_c)^2}$$

Выражая отсюда силу сопротивления и учитывая, что $a = 4g/3$, получим

$$F_c = \frac{\sqrt{7}}{3} mg$$

Направлен вектор ускорения под углом

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

к вертикали (см. рисунок).

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное понимание того, что сила сопротивления на тело действует - 1 балл
2. Правильное направление силы сопротивления – 1 балл
3. Правильный второй закон Ньютона для величины ускорения – 1 балл
4. Правильный ответ для силы сопротивления – 1 балл
5. Правильный ответ для направления вектора ускорения – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Если бы между стенками сосуда и поршня не действовали бы силы трения, то поршень можно было бы вывести из равновесия бесконечно малой силой. А здесь это не так, поэтому между поршнем и стенками действует сила трения.

Поскольку поршень перемещается медленно, для него выполняются условия равновесия. В случае опускания поршня

$$F_1 + mg + p_a S = pS + F_{тр}$$

В случае поднимания поршня

$$F_2 + pS = p_a S + F_{тр} + mg$$

Вычитая эти уравнения, получим

$$p = p_a + \frac{mg}{S} + \frac{1}{2} \frac{(F_1 - F_2)}{S}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное понимание и обоснование того, что между поршнем и стенками действует сила трения - 1 балл
2. Правильное утверждение, что при медленном движении поршня сумма действующих на него сил равна нулю – 1 балл
3. Правильное условие движения вверх – 1 балл

4. Правильное условие для движения вниз – 1 балл

5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Пусть первый рабочий выкопал колодец до глубины x . Тогда он поднял на поверхность земли грунт массой $m_1 = \rho x S$ (ρ - плотность грунта, S - площадь сечения колодца), совершив работу, которая пошла на увеличение потенциальной энергии грунта. Если взять уровень отсчета потенциальной энергии грунта на поверхности земли, то его потенциальная энергия после поднятия равна нулю. А его потенциальная энергия до поднятия равна потенциальной энергии точечного тела с массой, равной массе грунта, и расположенного в центре тяжести этого грунта, т.е. на глубине $x/2$ от поверхности. Таким образом, первый рабочий совершил работу

$$A_1 = \frac{1}{2} \rho g S x^2$$

Второй рабочий выкопает яму от глубины x (там, где закончил копать первый рабочий) до глубины h , подняв на поверхность грунт массой $\rho S(h - x)$. Конечная потенциальная энергия этого грунта (грунт на поверхности) равна нулю, начальная определяется положением его центра тяжести по отношению к поверхности земли. А поскольку центр тяжести находится на расстоянии

$$x + \frac{1}{2}(h - x) = \frac{1}{2}(h + x)$$

от поверхности, то увеличение потенциальной энергии этого грунта составляет

$$A_2 = \frac{1}{2} \rho g S (h^2 - x^2)$$

Из этих формул находим, что работы первого и второго рабочего будут равны для такого расстояния x , что

$$A_1 = A_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \rho g S x^2 = \frac{1}{2} \rho g S (h^2 - x^2)$$

или

$$x = \frac{h}{\sqrt{2}} = 0,71h$$

Т.е. первый рабочий должен выкопать яму, глубина которой составляет 0,71 глубины колодца, второй – 0,29 глубины.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное понимание метода вычисления работы – разность потенциальных энергий поднятого грунта - 1 балл

2. Правильное нахождение потенциальной энергии грунта – через положение его центра тяжести – 1 балл

3. Правильно найдена работа первого рабочего – 1 балл

4. Правильно найдена работа второго рабочего – 1 балл

5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Когда точки В и D соединяют проводником, ток через этот проводник не идет благодаря симметрии цепи. Находя сопротивление данной цепи в этом случае

$$R_{BD} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$$

найдем и силу тока, текущего через амперметр

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{R_1 + R_2} \quad (*)$$

Если проводником соединить точки А и D, сопротивление цепи будет равно

$$R_{AD} = \frac{(R_1 + R_2)R_2}{R_1 + 2R_2}.$$

Отсюда находим силу тока, текущего в этом случае через амперметр

$$I_1 = \frac{\varepsilon(R_1 + 2R_2)}{(R_1 + R_2)R_2} \quad (**)$$

Деля токи (*) и (**) друг на друга, найдем отношение сопротивлений резисторов

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2(I_1 - I_2)}{I_2} = \frac{1}{2} \quad (***)$$

При замыкании проводником точек С и D сопротивление цепи будет равно

$$R_{CD} = \frac{(R_1 + R_2)R_1}{2R_1 + R_2},$$

поэтому амперметр покажет следующий ток

$$I_3 = \frac{\varepsilon(2R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)R_1} \quad (4*)$$

Деля токи (*) и (4*) друг на друга, получим

$$\frac{I_3}{I_2} = 1 + \frac{R_2}{2R_1}$$

Подставляя в эту формулу отношение сопротивлений резисторов (***), найдем окончательно

$$I_3 = \frac{(4I_1 - 3I_2)I_2}{4(I_1 - I_2)} = 0,4 \text{ А}$$

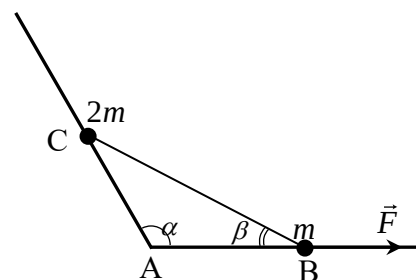
Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Получена правильная формула для тока I_1 через параметры цепи - 1 балл
2. Получена правильная формула для тока I_2 через параметры цепи – 1 балл
3. Правильно найдено отношение сопротивлений резисторов – 1 балл
4. Получена правильная формула для тока I_3 через параметры цепи – 1 балл
5. Правильный ответ (формула и число) – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Так как сумма углов в треугольнике равна 180° , то третий угол в треугольнике, образованном участками проволоки и нитью, также равен $\beta = 30^\circ$ (угол С на рисунке), а треугольник ABC – равнобедренный с равными сторонами АВ и АС.

На бусинки действуют силы натяжения нити, направленные вдоль нити, силы реакции со стороны проволоки и внешняя сила F



(напомним, что по условию силами тяжести и трения мы пренебрегаем). Поэтому второй закон Ньютона в проекциях на оси, параллельные участкам проволоки, дает

$$\begin{aligned} 2ma_1 &= T \cos \beta \\ ma_2 &= F - T \cos \beta \end{aligned}$$

где a_1 - ускорение тела массой $2m$, a_2 - ускорение тела массой m . Поскольку движение системы начинается с нулевых скоростей, ускорение тел сразу после начала движения будут связаны так же, как и скорости тел. Т.е. их проекции на нерастяжимую нить должны быть одинаковы. А поскольку углы между нитью и участками стержня вначале движения одинаковы, то

$$a_1 = a_2 = a$$

Складывая уравнения второго закона Ньютона, найдем ускорение тел

$$a = \frac{F}{3m}$$

а затем и силу натяжения нити сразу после начала движения

$$T = \frac{2F}{3 \cos \beta} = \frac{4F}{3\sqrt{3}}$$

Скорости бусинок найдем по теореме об изменении кинетической энергии. Так как внешней силой, совершающей работу над системой бусинок, является только сила F , для момента времени, когда вторая бусинка дойдет до угла, теорема дает

$$\frac{2mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = A_F$$

Здесь v_1 - скорость бусинки с массой $2m$, v_2 - скорость бусинки с массой m , A_F - работа силы F .

Так как длина каждого участка проволоки АВ и АС в начальный момент равна

$$\frac{l}{2 \cos \beta}$$

то перемещение точки приложения силы F равно

$$l - \frac{l}{2 \cos \beta} = \frac{(2 \cos \beta - 1)l}{2 \cos \beta}$$

и, следовательно, работа силы F есть

$$A_F = \frac{(2 \cos \beta - 1)Fl}{2 \cos \beta} = \frac{(\sqrt{3} - 1)Fl}{\sqrt{3}}$$

В момент удара второй бусинки об угол между проволоками скорости бусинок связаны следующим соотношением, которое следует из одинаковости их проекций на нить

$$v_1 \cos 60^\circ = v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2$$

В результате из теоремы об изменении кинетической энергии находим

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(\sqrt{3} - 1)Fl}{9\sqrt{3}m}}, \quad v_1 = 2v_2 = 2\sqrt{\frac{2(\sqrt{3} - 1)Fl}{9\sqrt{3}m}}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

- 1. Правильные вторые законы Ньютона в проекциях на проволоку - 1 балл**
- 2. Правильные ускорения бусинок в начальный момент – 1 балл**
- 3. Правильное использование теоремы об изменении кинетической энергии – 1 балл**
- 4. Правильная работа внешней силы и связь скоростей тел – 1 балл**
- 5. Правильный ответ для скоростей бусинок – 1 балл**

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов.

Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.