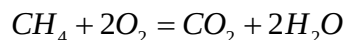


**Решения и критерии оценивания решений задач
Заключительного тура олимпиады «Росатом» по физике,
2024-2025 учебный год, 11 класс, первый комплект (Москва)**

1. Поскольку парциальные давления метана и кислорода одинаковы, то количества вещества этих газов одинаковы (пусть количество молей метана и кислорода до прохождения реакции равны ν_0). Далее. В результате химической реакции



образуются углекислый газ и вода, причем в реакцию на каждую молекулу метана вступают две молекулы кислорода. Следовательно, прореагирует весь кислород и половина молекул метана. В результате во взрывной камере будут содержаться: $\nu_0/2$ молей метана, не вступившего в реакцию, столько же - $\nu_0/2$ - молей углекислого газа и вдвое большее количество - ν_0 - молей воды. Поэтому из закона Клапейрона-Менделеева для каждой компоненты смеси заключаем, что когда температура смеси газов опустится до первоначального значения $t = 100^\circ C$ $\nu_0/2$ молей метана дадут парциальное давление, равное половине первоначального парциального давления метана или кислорода, т.е.

$$p_{CH_4} = \frac{2}{3} p_0.$$

Аналогично $\nu_0/2$ молей углекислого газа дадут такое же парциальное давление, равное половине первоначального парциального давления метана или кислорода, т.е.

$$p_{CO_2} = \frac{2}{3} p_0.$$

Если бы вся вода была бы в состоянии водяного пара, то парциальное давление воды было бы вдвое больше, чем парциальное давление метана или углекислого газа, т.е. $(4/3)p_0$. Но поскольку давление насыщенного водяного пара при температуре $t = 100^\circ C$ равно атмосферному давлению p_0 , парциальное давление водяного пара будет равно атмосферному давлению

$$p_{H_2O} = p_0,$$

а одна четверть молекул водяного пара сконденсируется. Поэтому давление во взрывной камере будет равно

$$p = p_{CH_4} + p_{CO_2} + p_{H_2O} = \frac{2}{3} p_0 + \frac{2}{3} p_0 + p_0 = \frac{7}{3} p_0$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное использование закона Дальтона и вывод, что число молей метана и кислорода в первоначальной смеси одинаково – 1 балл
2. Правильное уравнение реакции – 1 балл
3. Правильно найдены количества вещества продуктов реакции и непрореагировавшего метана во взрывной камере – 1 балл
4. Правильный вывод, что часть молекул водяного пара сконденсируется, и найдено парциальное давление водяного пара в получившейся смеси – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Комментарий. Если не проверено, что давление паров воды при температуре 100°C больше атмосферного, и потому будет конденсация пара, а давление не сконденсировавшегося пара будет равно атмосферному, по 4 критерию должен быть поставлен 0.

2. При движении системы грузов на нить со стороны груза M действует определенная сила и натягивает ее. Поскольку нить невесома, то сумма сил, действующих на нее должна равняться нулю, и, следовательно, кольцо должно действовать на нить такой же силой. Но сила взаимодействия кольца и нити – это сила трения, которая не может превосходить максимальную силу трения покоя $1,1mg$. Таким образом, сила натяжения нити T не может превосходить $1,1mg$, и в случае, если $T < 1,1mg$, кольцо не будет скользить по нити, и груз и кольцо будут двигаться так же, как два тела, связанные нитью на блоке.

Отсюда следует способ решения – рассмотреть малые значения массы груза M , при которых заведомо не будет скольжения кольца по нити, и груз и кольцо будут иметь одинаковые по величине ускорения. В этом случае найти силу натяжения нити, и исследовать ее поведение при изменении массы груза – если при каких-то ее значениях сила натяжения сравняется с величиной $1,1mg$, возникнет проскальзывание кольца по нити. Реализуем этот план.

При условии, что кольцо не скользит по нити, ускорения груза и кольца одинаковы по величине. В этом случае второй закон Ньютона для груза и кольца в проекциях на оси, направленную вниз для груза и вверх для кольца, имеет вид

$$\begin{aligned}Ma_x &= Mg - T \\ ma_x &= T - mg\end{aligned}$$

где a_x - проекция ускорения тел на эти оси, T - сила натяжения нити. Отсюда находим силу натяжения

$$T = \frac{2mMg}{m + M} \quad (*)$$

Из этой формулы следует, что при малых M сила натяжения мала и проскальзывания не возникает. Но с ростом массы груза M сила натяжения растет и если

$$\frac{2mMg}{m + M} = 1,1mg \quad \Rightarrow \quad M = \frac{1,1}{0,9}m = 1,2m$$

возникает проскальзывание между кольцом и нитью. Поэтому проскальзывание не будет возникать, если

$$0 < M < 1,2m$$

Из формулы (*) следует также, что максимальная сила натяжения нити достигается при $M \rightarrow \infty$, и она равна

$$T_{\max} = 2mg$$

Следовательно, если максимальное значение силы трения между нитью и кольцом будет больше, чем $2mg$, проскальзывание не возникнет ни при какой массе груза.

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильная (и обоснованная) идея решения: сила натяжения нити должна быть меньше максимальной силы трения между кольцом и нитью – 1 балла
2. Правильные уравнения второго закона Ньютона для тел при условии, что нет скольжения кольца по нити – 1 балл
3. Правильно найдена сила натяжения нити – 1 балл
4. Правильный ответ для масс груза, при которых не будет скольжения между кольцом и нитью – 1 балл
5. Правильный ответ для силы трения, при котором не будет скольжения при любых массах груза – 1 балл.

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты. Примечание. Возможно решение, в котором в качестве основы решения рассматриваются большие массы груза, при которых заведомо существует скольжение. В этом случае сила натяжения равна максимальной силе трения, а ускорения кольца и груза – разные. Можно найти эти ускорения и увидеть, что при уменьшении массы груза при некотором ее значении эти ускорения совпадут. Если такой способ решения привел к правильным ответам, то он оценивается полным баллом.

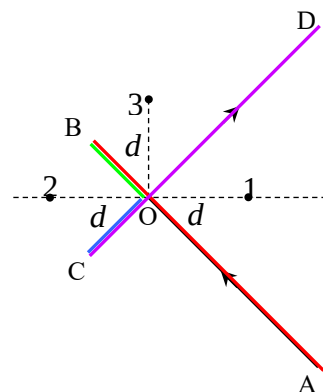
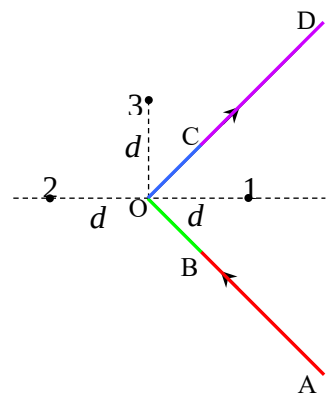
3. Получить выражения для индукций магнитного поля в исследуемых точках через ток в проводе и расстояние от него то соответствующих точек достаточно сложно, тем более, что ток в проводе нам не задан. Поэтому поступим по-другому. Свяжем индукции B_1 , B_2 и B_3 друг с другом.

Точка 1. Согласно принципу суперпозиции поле в этой точке можно представить как поле, созданное полубесконечным проводом АВ на расстоянии $d/\sqrt{2}$ от его конца (отмечен красным на рисунке), куском провода ВО длиной $d/\sqrt{2}$ на расстоянии $d/\sqrt{2}$ от одного из его концов (отмечен зеленым на рисунке), еще одним куском провода ОС длиной $d/\sqrt{2}$ на расстоянии $d/\sqrt{2}$ от одного из его концов (отмечен синим на рисунке) и еще одним полубесконечным проводом CD на расстоянии $d/\sqrt{2}$ от его конца (отмечен фиолетовым на рисунке).

Причем согласно правилу правой руки все эти индукции направлены одинаково (за чертеж). Поэтому если полубесконечные провода создают в точке на расстоянии $d/\sqrt{2}$ от своего конца поле b_1 , куски провода длиной $d/\sqrt{2}$ создают в точке на расстоянии $d/\sqrt{2}$ от одного из своих концов поле b_2 , то

$$B_1 = 2b_1 + 2b_2$$

Точка 2. Здесь ситуация другая: это точка не находится напротив концов полубесконечного провода или провода длиной $d/\sqrt{2}$. Но... Мы можем представить поле в этой точке как поле полубесконечного провода АВ (красный на рисунке) напротив его конца на расстоянии $d/\sqrt{2}$ от него минус поле куска провода ВО длиной $d/\sqrt{2}$ на расстоянии $d/\sqrt{2}$ от одного из его концов (зеленый на рисунке) и поле полубесконечного провода CD (фиолетовый на рисунке) напротив его конца на расстоянии $d/\sqrt{2}$ от него минус поле куска провода СО длиной $d/\sqrt{2}$ на



расстоянии $d/\sqrt{2}$ от одного из его концов (синий на рисунке). Причем согласно правилу правой руки эти поля также складываются. Поэтому

$$B_2 = 2b_1 - 2b_2$$

Точка 3. Аналогичное рассмотрение поля в точке 3 показывает, что его можно представить как поле полубесконечного провода минус поле куска, поле второго полубесконечного провода плюс поле куска, причем согласно правилу правой руки эти поля вычитаются. Поэтому

$$B_3 = (b_1 + b_2) - (b_1 - b_2) = 2b_2$$

И, следовательно,

$$B_3 = \frac{B_1 - B_2}{2}$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильная исходная идея решения – связать индукции магнитного поля B_1 , B_2 и B_3 друг с другом на основе принципа суперпозиции – 1 балл

2. Правильная связь индукции B_1 с индукцией полубесконечного провода и конечного куска провода - 1 балл

3. Правильная связь индукции B_2 с индукцией полубесконечного провода и конечного куска провода - 1 балл

4. Правильная связь индукции B_3 с индукцией конечного куска провода - 1 балл

5. Правильный ответ для B_3 – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Решим сначала следующую вспомогательную задачу. Пусть жесткий стержень длиной l движется произвольным образом и скорости его концов $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ в некоторый момент времени известны. Найдем в этот момент скорость точки С стержня, лежащей на расстоянии $l/4$ от конца 1.

Перейдем в систему отсчета, связанную с концом В нашего стержня. В ней этот конец стержня покоится, а скорость конца А $\vec{v}_{A.o.B}$ определяется законом сложения скоростей

$$\vec{v}_{A.o.B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

При этом вектор $\vec{v}_{A.o.B}$ направлен перпендикулярно стержню, поскольку движение стержня в этой системе отсчета – вращение вокруг конца В. Значит, и скорости всех остальных точек стержня в этой системе отсчета перпендикулярны стержню, а их величина пропорциональна расстоянию от каждой точки до второго конца. Поэтому величина скорости точки С в этой системе отсчета составляет $3/4$ от скорости $v_{A.o.B}$, а направление такое же. Поэтому

$$\vec{v}_{C.o.B} = \frac{3}{4} \vec{v}_{A.o.B} = \frac{3}{4} (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

Чтобы найти скорость $\vec{v}_C$ точки С в системе отсчета, связанной с землей, снова воспользуемся законом сложения скоростей. Имеем

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C.o.2.} + \vec{v}_B = \frac{3}{4} (\vec{v}_A - \vec{v}_B) + \vec{v}_B = \frac{3\vec{v}_A + \vec{v}_B}{4}$$

А поскольку такая связь справедлива в любой момент времени, такой же является и связь ускорений этих точек

$$\vec{a}_C = \frac{3\vec{a}_A + \vec{a}_B}{4} \quad (*)$$

Вернемся теперь к нашей задаче. С одной стороны, ускорение точки С направлено вдоль стержня, с другой, - связано предыдущей формулой с ускорениями $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$, которые направлены вдоль вертикальной стены и горизонтального пола соответственно. Поэтому для величин этих ускорений имеем

$$\begin{cases} 16a_C^2 = 9a_A^2 + a_B^2 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{3a_A}{a_B} \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$a_A = \frac{4}{3}a_C \sin \alpha, \quad a_B = 4a_C \cos \alpha$$

Обратим внимание на то, что проекции векторов ускорений концов стержня на сам стержень (в отличие от скоростей) не равны друг другу.

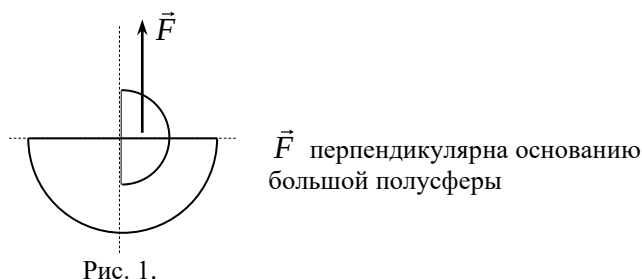
Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Разумная попытка установления правильной связи вектора ускорения точки С с векторами ускорений концов стержня (или так, как сделано выше, или через центр масс, или каким-либо другим разумным способом) – 1 балл
2. Правильная связь вектора ускорения точки С с векторами ускорений концов стержня - 1 балл
3. Правильная система уравнений для значений ускорений концов (или использование скалярного произведения для нахождения ускорений концов из уравнения (*)) - 1 балл
4. Правильный ответ для a_A – 1 балл
5. Правильный ответ для a_B – 1 балл

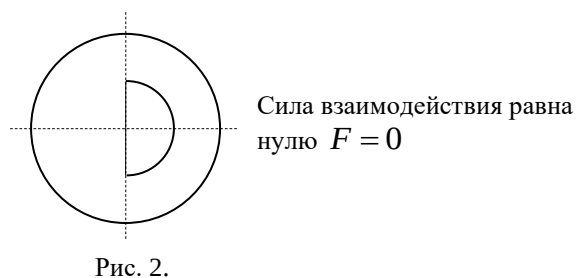
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Примечание. Если в работе использовано «условие палочки» для ускорений (которое является неверным), максимальная оценка участника за эту задачу 1 балл, если есть что-то разумное по критерию 1.

5. Докажем, что сила взаимодействия двух равномерно заряженных концентрических полусфер, плоскости оснований которых перпендикулярны друг другу, перпендикулярна основанию большой полусферы (как это показано на рисунке 1).

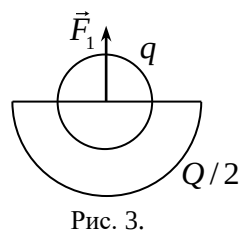


Действительно, пусть внутри равномерно заряженной сферы находится равномерно заряженная полусфера. Ясно, что сила их взаимодействия друг с другом будет равна нулю, поскольку все заряды меньшей полусферы находятся внутри большой сферы,



которая не действует ни на какой точечный заряд, помещенный внутрь нее (рисунок 2). А это значит, что силы, действующие на меньшую полусферу со стороны большой нижней и большой верхней полусфер равны по величине и противоположны по направлению. С другой стороны, две эти силы должны получаться друг из друга отражением относительно основания большой полусферы, поскольку две эти системы зарядов получаются друг из друга отражением относительно основания большой полусферы (см. рисунок 3). Но если бы эти силы были направлены под не прямым углом к этой плоскости, они не сложились бы в нуль. Отсюда и следует сделанное утверждение о направлении силы, действующей со стороны большой полусферы на малую (рис. 1).

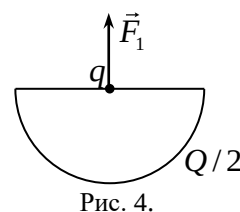
А это значит, что если бы мы нашли силу F_1 взаимодействия большой полусферы радиуса $2R$ с зарядом $Q/2$ и сферы радиуса R с зарядом q , то искомая сила F взаимодействия полусфер составляла ровно половину от силы F_1 (рисунок 3).



Искомая сила есть $\frac{1}{2}$ силы $\vec{F}_1$

Найдем силу F_1 .

Для этого заметим, что электрическое поле равномерно заряженной сферы снаружи от нее такое же, как поле точечного заряда, расположенное в ее центре. А это значит, что малая сфера радиуса R , заряженная зарядом q , действует на концентрическую полусферу радиуса $2R$ с зарядом $Q/2$ так же, как точечный заряд q , расположенный в центре полусферы, действует на полусферу. Такой же (по третьему закону Ньютона) будет и сила, действующая со стороны полусферы на точечный заряд (см. рисунок 4). Таким образом, вычисление силы F_1 сводится к вычислению силы взаимодействия полусферы и точечного заряда в ее центре.



А эту силу можно вычислить так. Мысленно разобьем полусферу на малые площадки, найдем силу, действующую на точечный заряд со стороны каждой площадки, просуммируем векторы сил. При этом суммировать можно даже не векторы, а их проекции на ось симметрии задачи (показана пунктиром на рисунке 5), поскольку благодаря ее симметрии сила может быть направлена только вдоль этой оси.

Со стороны площадки площадью ΔS на точечный заряд действует сила, проекция которой на ось симметрии равна

$$\Delta F \cos \alpha = k \frac{q \Delta Q}{(2R)^2} \cos \alpha$$

где ΔQ - заряд площадки, α - угол между вектором силы и осью симметрии, k - постоянная закона Кулона $2R$ - радиус полусферы (см. рисунок 5). Очевидно, заряд площадки пропорционален ее площади

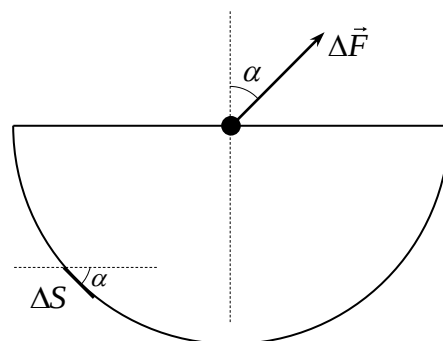


Рис. 5

$$\Delta Q = \frac{Q/2}{2\pi(2R)^2} \Delta S = \frac{Q}{4\pi(2R)^2} \Delta S$$

($Q/2$ - заряд полусферы). Поскольку угол между площадкой и прямой, параллельной основанию полусферы, равен углу между силой $\Delta \vec{F}$ и осью симметрии (рисунок 5), то произведение $\Delta S \cos \alpha$ есть проекция площади рассматриваемой площадки на основание полусферы. Поэтому суммирование сил, действующих со стороны всех площадок, на которые можно разбить полусферу, на точечный заряд, дает

$$F_1 = \sum_i \Delta F_i \cos \alpha_i = k \frac{q}{(2R)^2} \frac{Q}{4\pi(2R)^2} \sum_i \Delta S_i \cos \alpha_i$$

причем сумма $\sum_i \Delta S_i \cos \alpha_i$ равна площади основания полусферы - $\pi(2R)^2$. В результате получим для силы взаимодействия точечного заряда q и полусферы радиуса R с зарядом Q

$$F_1 = k \frac{qQ}{4(2R)^2} = k \frac{qQ}{16R^2}.$$

Отсюда получаем окончательно: сила, действующая со стороны полусферы радиуса $2R$, заряженной зарядом $Q/2$ на концентрическую полусферу радиуса R с зарядом $q/2$ с перпендикулярной плоскостью основания направлена перпендикулярно основанию большой полусферы и равна по величине

$$F = \frac{1}{2} F_1 = k \frac{qQ}{32R^2}.$$

В первом и третьем вариантах $Q = 3q$, поэтому ответ в них –

$$F = k \frac{3q^2}{32R^2}$$

Во втором и четвертом вариантах $Q = 5q$, поэтому ответ в них –

$$F = k \frac{5q^2}{32R^2}$$

Критерии оценивания решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

- 1. Правильная идея решения – свести задачу к вычислению силы взаимодействия полусферы и точечного заряда, расположенного в ее центре – 1 балл**
- 2. Доказано, что сила взаимодействия большой полусферы и концентрической малой полусферы с перпендикулярным основанием перпендикулярна основанию большой полусферы – 1 балл**
- 3. Правильный (и обоснованный) вывод, что вычисление силы взаимодействия большой и малой концентрических полусфер сводится к вычислению силы, действующей со стороны большой полусферы на точечный заряд в центре – 1 балл**
- 4. Правильный метод вычисления силы взаимодействия полусферы и концентрического точечного заряда – 1 балл**
- 5. Правильный ответ – 1 балл.**

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Примечание. Пункт 2 оценивать только в случае, если есть доказательство или хорошее обоснование направления силы.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.

Решения и критерии оценивания решений задач

1. Так как поршни подвижны, давление в отсеках одинаковое. А поскольку в начальном состоянии по условию одинаковы объемы и температуры газов, то в каждом отсеке содержится одинаковое количество вещества газа.

Далее. После нагревания газа в левом отсеке давление газа в нем увеличится, и поршни сместятся влево. При этом давление газа во всех трех отсеках сосуда должно быть одинаковым, поскольку поршни подвижны. А поскольку температура и количество вещества газа в среднем и правом отсеках одинаковы, то при одинаковых давлениях у этих отсеков должен быть одинаковый объем. Поэтому, если правый поршень сместился вправо на величину Δx , уменьшая объем правого отсека и увеличивая объем среднего на величину $S\Delta x$, то левый поршень подвинется вправо на величину $2\Delta x$ так, чтобы объем среднего отсека также уменьшился на $S\Delta x$ (S - площадь сечения сосуда).

Учтем теперь одинаковость давлений газа в левом и среднем отсеках. Выражая давления газа в левом и среднем отсеках из закона Клапейрона-Менделеева, получим

$$\frac{\nu R 2T}{V + 2\Delta x S} = \frac{\nu R T}{V - \Delta x S}$$

где ν - количество вещества газа в каждом отсеке, $V = lS/3$ - объем каждого отсека до нагревания, T и $2T$ - температура газов до нагревания, и температура газа в левом отсеке после нагревания. Отсюда находим перемещение правого и левого поршней соответственно

$$\Delta x_n = \frac{l}{12}, \quad \Delta x_{\text{л}} = 2\Delta x_n = \frac{l}{6}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

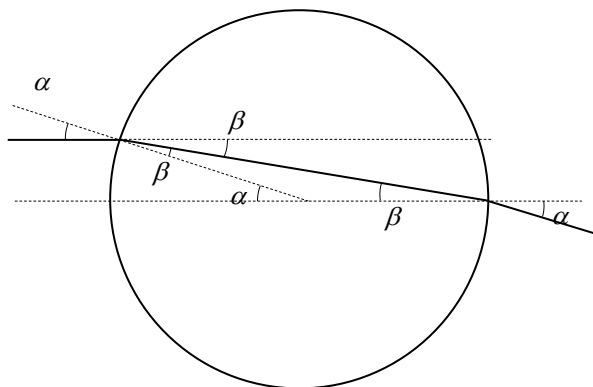
1. Правильное использование закона Клапейрона-Менделеева – 1 балл
 2. Правильный вывод, что количество вещества газа в каждом отсеке одинаково – 1 балл
 3. Правильная связь перемещений поршней - 1 балл
 4. Правильное условие равновесия левого поршня после нагревания газа в левом отсеке – 1 балл
 5. Правильные ответы для перемещений поршней – 1 балл
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Рассмотрим ход лучей внутри шара. По закону Снеллиуса получаем

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

где α - угол падения луча на шар, β - угол преломления луча внутри шара, $n = 2$ – показатель преломления вещества шара.

А поскольку радиус пучка много меньше



радиуса шара, то $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \beta \approx \beta$. Поэтому с учетом того, что $n = 2$, из закона Снеллиуса получаем, что

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

А это значит (см. рисунок), что преломленный луч делит угол между продолжением луча в шаре и радиусом, проведенным в точку падения, на два равных угла β и потому угол между лучом и прямой, параллельной падающему лучу и проходящей через центр шара, тоже равен β (как внутренние накрест лежащие). А это значит, что треугольник, образованный точкой падения луча, центром шара и точкой пересечения луча с прямой, проходящей через центр шара, равнобедренный. А это значит, что все лучи пучка после прохождения шара попадут в точку пересечения оси пучка и задней (по отношению к пучку света) границы шар-воздух. Причем угол падения каждого луча на границу шар-воздух будет равен углу преломления β . Поэтому с учетом симметрии закона Снеллиуса по отношению к падающим-преломленным лучам получаем, что каждый луч выйдет из этой точки под тем же углом α под которым он падал на поверхность шара (см. рисунок). А поскольку максимальный угол падения лучей на поверхность шара, определяется соотношением

$$\alpha_m = \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \approx \frac{r}{R}$$

(здесь угол задан в радианах), радиус пятна на экране r_1 определяется соотношением

$$r_1 = l \operatorname{tg} \alpha \approx l \alpha = \frac{lr}{R} = 1 \text{ см.}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

- 1. Правильное использование закона Снеллиуса – 1 балл**
 - 2. Замечено, что углы падения и преломления малы, и можно синусы заменить на углы – 1 балл**
 - 3. Доказано, что все лучи пучка выйдут из шара в одной точке, лежащей на пересечении оси пучка и задней поверхности – 1 балл**
 - 4. Правильно найден угол выхода лучей из шара – 1 балл**
 - 5. Правильный ответ (и формула, и число) – 1 балл**
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.**

3. Мысленно разобьем веревку на такие малые элементы, что каждый можно считать находящимся на определенном расстоянии от оси вращения. Тогда второй закон Ньютона для i -го элемента веревки массой Δm_i и длиной Δr_i , который находится на расстоянии r_i от оси вращения, дает

$$\Delta m_i \omega^2 r_i = T(r_i) - T(r_i + \Delta r_i) \quad (*)$$

где $T(r_i)$ и $T(r_i + \Delta r_i)$ - силы натяжения веревки с двух сторон от рассматриваемого элемента.

При этом масса элемента может быть представлена как

$$\Delta m_i = \frac{m}{l} \Delta r_i$$

Суммируя уравнения движения для всех элементов веревки, находящихся на расстояниях от $5l/8$ от оси вращения до l , получим следующее. Сумма разностей сил натяжения даст силу натяжения веревки в сечении, находящемся на расстоянии $5l/8$ от оси вращения $T(5l/8)$, поскольку сила натяжения веревки на самом ее конце равна нулю, а все промежуточные значения сократятся при суммировании (т.е. как раз ту величину, которую мы и должны найти).

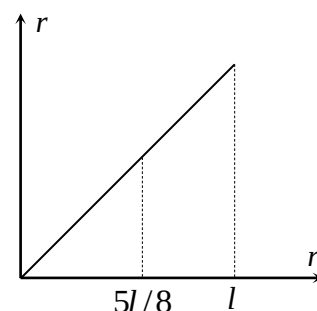
Сумма в левой части

$$\sum_i \Delta m_i \omega^2 r_i = \frac{m\omega^2}{l} \sum_i r_i \Delta r_i$$

может быть вычислена так. Аналогичные суммы возникают при вычислении работы силы упругости и вычисляются как площадь под графиком зависимости силы упругости от перемещения конца пружины. Здесь для вычисления суммы $\sum_i r_i \Delta r_i$ нужно построить

график $r(r)$ (прямая, идущая под углом 45°) и вычислить площадь под ним. Этот график показан на рисунке, а площадь, которая нам

нужна, - это площадь трапеции между графиком, осью абсцисс, и двумя вертикальными прямыми, показанными пунктиром на рисунке. В результате получим



$$T(5l/8) = \frac{m\omega^2}{l} \frac{\left(\frac{5l}{8} + l\right)}{2} \frac{3l}{8} = \frac{39}{128} m\omega^2 l \quad (**)$$

Знающие законы динамики для протяженного тела могли получить эту формулу и более простым (технически) способом. Как известно, центр масс протяженного тела движется так, как движется материальная точка с массой, равной массе всего тела и расположенная в его центре масс, под действием внешних сил, действующих на тело. Рассмотрим движение участка веревки длиной

$3l/8$, расположенного на расстоянии от $5l/8$ до l от оси вращения (см. рисунок; рассматриваемый участок веревки выделен). Масса этого участка есть масса трех восьмых массы веревки, т.е.

$$\Delta m = \frac{3}{8} m$$

Центр масс этого участка находится на расстоянии

$$r = \frac{5l}{8} + \frac{1}{2} \frac{3l}{8} = \frac{13l}{16}$$



от оси вращения. А внешней силой, действующей на рассматриваемый участок, является сила натяжения веревки в ее сечении, расположенном на расстоянии $5l/8$ от оси вращения. А поскольку этот участок движется по окружности с угловой скоростью ω , то второй закон Ньютона для этого участка дает

$$T(5l/8) = \Delta m \omega^2 r \quad \Rightarrow \quad T(5l/8) = \frac{3m}{8} \omega^2 \frac{13}{16} l = \frac{39}{128} m \omega^2 l = 0,305 m \omega^2 l$$

т.е. тот же ответ, который был получен в первом способе решения.

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильная идея нахождения силы натяжения – рассмотрение второго закона Ньютона для всех элементов веревки, лежащих на расстояниях, больших $5l/8$ от оси вращения – 1 балл

2. Правильный второй закон Ньютона для каждого элемента веревки – 1 балл

3. Правильное суммирование разностей сил натяжения – 1 балл

4. Правильное нахождение суммы $\sum_i \Delta m_i \omega^2 r_i$ графическим методом – 1 балл

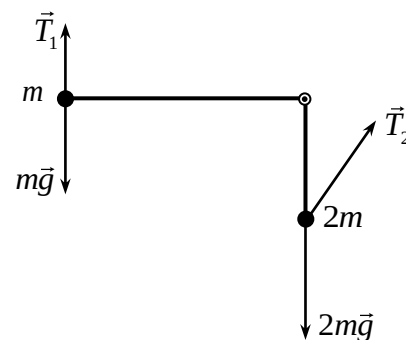
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Примечание. Решение через закон динамики для протяженного тела (через ускорение центра масс), если оно привело к правильному ответу, оценивается полным баллом.

4. Поскольку на стержень действуют тела и ось вращения, и сумма этих сил равна нулю, то для нахождения силы, действующей со стороны стержня на ось вращения, найдем силу, с которой на стержень действуют тела. А для этого, рассматривая движение тел, найдем силу, с которой стержень действует на тела.

После отпускания стержня, оба тела будут двигаться по окружностям. Поэтому их ускорения имеют и нормальную, и тангенциальную компоненты. Но т.к. сразу после отпускания у тел практически нулевая скорость, их ускорения в этот момент направлены по касательным к траекториям. Т.е. вектор ускорения тела m направлен вертикально (вниз), тела $2m$ – горизонтально (направо). Поэтому силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, действующие на тела со стороны



стержня направлены так, как показано на рисунке – сила $\vec{T}_1$ направлена вертикально, сила $\vec{T}_2$ имеет и вертикальную и горизонтальную составляющие. Второй закон Ньютона для тел в проекциях на вертикальную ось y (для первого тела) и вертикальную (y) и горизонтальную (x) оси для второго дает

$$\begin{cases} ma_1 = mg - T_1 \\ 0 = -T_{2y} + 2mg \\ 2ma_2 = T_{2x} \end{cases} \quad (*)$$

Установим теперь условия связи для неизвестных. Стержень невесомый, поэтому сумма сил и сумма моментов всех сил, действующих на стержень должны равняться нулю. Нулевая сумма сил получится всегда из-за силы, действующей на ось, а вот нулевая сумма моментов должна получаться для наших сил. Поэтому

$$2T_1 = T_{2x}$$

(двойка из-за вдвое большего плеча для силы T_1). Так как наша конструкция является жесткой, она вращается вокруг оси как целое. Поэтому в любой момент времени линейная скорость тела массой m вдвое больше линейной скорости тела с массой $2m$. Поэтому

$$a_1 = 2a_2$$

Решая систему уравнений (*) с данными условиями связи, получим

$$a_1 = \frac{2g}{3}, a_2 = \frac{g}{3}, T_1 = \frac{mg}{3}, T_{2x} = \frac{2mg}{3}, T_{2y} = 2mg$$

Отсюда следует, что со стороны тел на стержень действует сила с горизонтальной составляющей

$$T_x = T_{2x} = \frac{2mg}{3}$$

и с вертикальной составляющей

$$T_y = T_1 + T_{2y} = \frac{7mg}{3}$$

Поэтому суммарная сила, действующая на стержень со стороны тел, есть

$$T = \sqrt{\frac{4m^2g^2}{9} + \frac{49m^2g^2}{9}} = \frac{\sqrt{53}mg}{3}$$

А поскольку сумма сил, действующих на стержень должна равняться нулю, то именно такой силой ось вращения действует на стержень, а стержень на ось вращения.

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильная идея решения – найти силы, с которыми стержень действует на тела, а потом использовать тот факт, что сумма сил, действующих на стержень должна равняться нулю - 1 балл
 2. Правильно расставлены силы, действующие на тела. Правильный чертеж – 1 балл
 3. Правильные условия связи неизвестных – 1 балл
 4. Правильная система уравнений для ускорений и сил натяжения – 1 балл
 5. Правильный ответ – 1 балл
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Из-за уменьшения величины проекции вектора магнитной индукции на ось y с уменьшением высоты расположения кольца меняется магнитный поток через кольцо. По закону электромагнитной индукции Фарадея в кольце возникает электрический ток, который взаимодействует с полем. Кроме того, из-за уменьшения вертикальной проекции магнитного поля, у вектора индукции появляется горизонтальная проекции. Поэтому взаимодействие

горизонтального тока в кольце и индукции, направленной горизонтально, по закону Ампера приводит к возникновению вертикальной силы. Причем эта сила будет силой торможения, поскольку все индукционные явления по правилу Ленца «стремятся» компенсировать причины, их вызывающие. В данном случае движение кольца вниз. И чем быстрее движется кольцо, тем больше будет в нем индукционный ток, и тем больше сила Ампера, тормозящая движение кольца. Поэтому при некоторой скорости кольца сила Ампера полностью компенсирует силу тяжести – кольцо далее будет двигаться с постоянной скоростью. Найдем эту скорость.

Пусть установившаяся скорость кольца - v . Тогда за малый интервал времени Δt кольцо спустится на расстояние $\Delta y = v\Delta t$. И тогда изменение магнитного потока через кольцо будет равно

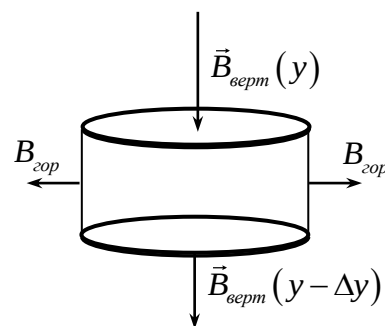
$$\Delta\Phi = B(y)S - B(y - \Delta y)S = B_0\alpha v\Delta t S \quad (*)$$

Поэтому в кольце возникнет индукционный ток

$$I = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} = \frac{B_0\alpha v S}{R}$$

где R - сопротивление кольца.

Найдем теперь горизонтальную проекцию магнитного поля. Поскольку не существует магнитных зарядов, поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю. А поскольку поток магнитного поля через кольцо в двух его положениях – разный, то у магнитного поля наряду с вертикальной составляющей есть также горизонтальная составляющая. Чтобы найти ее рассмотрим два положения кольца, отстоящие друг от друга на расстояние Δy , и построим цилиндр на этих двух положениях кольца как на основаниях (см. рисунок). Поток магнитного поля через поверхность цилиндра равен нулю. Поэтому поток магнитного поля через боковую поверхность цилиндра равен разности потоков через основания (*). А поскольку площадь оснований цилиндра есть πr^2 , а площадь его боковой поверхности $2\pi r\Delta y$ (r - радиус кольца), получаем



$$B_0\alpha\Delta y\pi r^2 = B_{\text{гор}}2\pi r\Delta y$$

Отсюда находим величину горизонтальной составляющей индукции магнитного поля

$$B_{\text{гор}} = \frac{1}{2}B_0\alpha r \quad (**)$$

Сила Ампера, действующая на кольцо с индукционным током со стороны горизонтального магнитного поля с индукцией, направлена вертикально вверх и равна

$$F_A = B_{\text{гор}}IL$$

где L - длина кольца. Подставляя сюда горизонтальную составляющую индукции магнитного поля (***) и индукционный ток, получим

$$F_A = \frac{\pi^2 B_0^2 \alpha^2 r^4 v}{R}$$

Приравнявая эту силу силе тяжести, действующей на кольцо, получим окончательно для скорости установившегося движения кольца

$$v = \frac{mgR}{\pi^2 B_0^2 \alpha^2 r^4}$$

Критерии оценки решения задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

- 1. Правильная основная идея решения – в кольце возникает индукционный ток, на который действует магнитное поле и тормозит кольцо - 1 балл**
- 2. Правильно найден индукционный ток в кольце – 1 балл**
- 3. Правильный (и обоснованный) способ нахождения горизонтальной составляющей индукции магнитного поля – 1 балл**
- 4. Правильно найдена горизонтальная составляющая индукции магнитного поля - 1 балл**
- 5. Правильный ответ – 1 балл**

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Примечание 1. Ненулевая оценка по пункту 3 ставится только в том случае, если есть «словесное» упоминание отсутствия магнитных зарядов и равенство в связи с этим потока магнитного поля через любую замкнутую поверхность.

Примечание 2. Возможно решение этой задачи по закону сохранения энергии - мощность, развиваемая силой тяжести над кольцом, превращается в мощность тока, текущего в кольце благодаря электромагнитной индукции. Такое решение (при условии получения правильного ответа, правильного обоснования и комментария, почему не нужно учитывать работу силы Ампера) оценивается полным баллом.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.