

Решения и критерии оценивания решений задач

1. На пачках бумаги приводится так называемая поверхностная плотность бумаги – отношение массы листа к его площади

$$\sigma = \frac{m}{S}$$

Эта величина, имеющая размерность кг/м^2 представляет собой массу единицы площади (квадратного метра) бумаги. Связь объёмной ρ и поверхностной плотности σ можно установить, найдя, например, массу листа через объёмную и поверхностную плотность. Имеем

$$m = \rho V = \rho dS \quad \text{и также} \quad m = \sigma S$$

где d - толщина листа бумаги, S - его площадь. Отсюда

$$\rho d = \sigma$$

Поскольку объёмная плотность офисной бумаги составляет $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$, из последней формулы находим толщину листа бумаги

$$d = \frac{\sigma}{\rho} = 10^{-4} (\text{м}) = 0,1 \text{ мм}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное понимание того, что такое поверхностная плотность - 1 балл

2. Правильное понимание того, что такое объёмная плотность – 2 балл

3. Правильная идея решения – выражение массы листа через поверхностную и объёмную плотность – 1 балл

4. Правильный ответ (формула) – 1 балл

5. Правильный ответ (число) – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. За то время, пока первая машина ехала одна, она проехала расстояние

$$S = v_1 \Delta t$$

После этого на трассе были обе машины. Первая должна была проехать до города В расстояние

$$l - S = l - v_1 \Delta t .$$

Вторая – расстояние l . А поскольку по условию они пришли в город В одновременно, имеем

$$\frac{l - v_1 \Delta t}{v_1} = \frac{l}{1,2v_1}$$

Отсюда находим

$$\Delta t = \frac{0,2l}{1,2v_1} = \frac{l}{6v_1} = 0,38 \text{ часа}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное использование формулы «расстояние-время-скорость» - 1 балл

2. Правильно найдено расстояние, на которое первая машина успела уехать за время Δt – 1 балл

3. Правильно уравнение для времени Δt - 1 балл

4. Правильный ответ (формула) – 1 балл

5. Правильный ответ (число) – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Массовой концентрацией раствора кислоты в воде называется отношение массы чистой кислоты в растворе к массе всего раствора

$$C = \frac{m}{m + M}$$

где m - масса кислоты, M - масса воды (и, соответственно, $m + M$ - масса всего раствора). С другой стороны, плотность раствора определяется как отношение его массы к его объёму

$$\rho = \frac{\frac{m + M}{\frac{m}{2\rho_6} + \frac{M}{\rho_6}}} = \frac{(m + M)2\rho_6}{m + 2M}$$

Отсюда находим массу воды в растворе

$$M = \frac{m(2\rho_6 - \rho)}{2(\rho - \rho_6)}$$

Используя теперь определение концентрации раствора, получим

$$C = \frac{m}{m + M} = \frac{m}{m + \frac{m(2\rho_6 - \rho)}{2(\rho - \rho_6)}} = \frac{2(\rho - \rho_6)}{\rho} = 0,33 = 33\%$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное понимание того, что такое концентрация раствора - 1 балл
2. Правильное понимание того, что такое средняя плотность – 2 балл
3. Правильное соотношение для средней плотности – 1 балл
4. Правильно найдена масса воды (через массу кислоты) или наоборот – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Пусть в некоторый момент времени блоки занимают положение, показанное на рисунке в условии задачи. И пусть прошёл малый интервал времени Δt . Тогда три подвижных блока, которые тянут, переместятся на расстояния $v\Delta t$ (налево), $2v\Delta t$ (налево) и $3v\Delta t$ (вверх на рисунке). Значит, веревка справа от двух подвижных блоков должна укоротиться на величину $2v\Delta t$, слева удлинится на $4v\Delta t$, сверху удлинится на $6v\Delta t$. Поэтому потребуется «лишняя» веревка длиной $6v\Delta t + 4v\Delta t - 2v\Delta t = 8v\Delta t$, которая может взяться только из нижней петли, охватывающей блок с грузом. Значит, этот блок (а вместе с ним и груз) поднимется вверх на величину $4v\Delta t$, чтобы освободить кусок веревки, необходимый для перемещения остальных блоков. И, следовательно, за время Δt груз переместился на расстояние $4v\Delta t$, а значит его скорость равна $4v$.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное понимание того, как устанавливать кинематические связи - 1 балл
2. Правильное понимание того, что при перемещении блока на Δx требуется лишняя веревка (или веревка освобождается) длиной $2\Delta x$ – 2 балл
3. Правильное понимание, для каких блоков потребуется лишняя веревка, где веревка освободится – 1 балл
4. Правильно найдена длина требующейся лишней веревки – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Пусть расстояние между столбами равно l , а скорость машины в первом случае - v . Тогда

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{v}{l}$$

После того как машина увеличила скорость на Δv , аналогичное соотношение даёт

$$\frac{1}{\Delta t_1} = \frac{v + \Delta v}{l},$$

Откуда находим

$$\frac{\Delta v}{l} = \frac{1}{\Delta t_1} - \frac{1}{\Delta t} = \frac{\Delta t - \Delta t_1}{\Delta t \Delta t_1}$$

После того как машина увеличила свою скорость на $2\Delta v$ по сравнению с первым случаем, имеем

$$\frac{1}{\Delta t_2} = \frac{v + 2\Delta v}{l} = \frac{v}{l} + \frac{2\Delta v}{l} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\Delta v}{l} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2(\Delta t - \Delta t_1)}{\Delta t \Delta t_1} = \frac{2\Delta t - \Delta t_1}{\Delta t \Delta t_1},$$

и соответственно

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t \Delta t_1}{2\Delta t - \Delta t_1} = 3,1 \text{ с.}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

- 1. Правильное использование формулы «расстояние-время-скорость» - 1 балл**
- 2. Правильная формула «расстояние-время-скорость» для первого и второго случаев – 1 балл**
- 3. Правильно установлена связь величины Δv и расстояния между столбами линии электропередач - 1 балл**
- 4. Правильный ответ (формула) – 1 балл**
- 5. Правильный ответ (число) – 1 балл**

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.

Решения и критерии оценивания решений задач

1. Пусть a - ребро куба. Тогда площадь поверхности куба есть $6a^2$ (6, т.к. у куба 6 граней). Отсюда находим

$$a = \sqrt{\frac{S}{6}} = 2 \text{ см.}$$

Поэтому объём куба равен $V_k = a^3$. А вот объём вещества в кубе - $V = m / \rho$. Поэтому объём полости в кубе определяется соотношением

$$V_{\text{полости}} = V_k - V = a^3 - \frac{m}{\rho} = 2,9 \text{ см}^3.$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильная идея нахождения объёма полости – разность объёма куба и объёма вещества - 1 балл
 2. Правильное использование формулы «масса-объём-плотность» – 1 балл
 3. Правильно найдено ребро куба – 1 балл
 4. Правильный ответ (формула) – 1 балл
 5. Правильный ответ (число) – 1 балл
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Поскольку расстояние между пунктами А и В равно S , то скорости первого v_1 и второго v_2 пешехода есть

$$v_1 = \frac{S}{t}, \quad v_2 = \frac{S}{1,2t}$$

Используя теперь известную формулу для времени встречи тел, начавших одновременное движение навстречу друг другу с расстояния S

$$t_{\text{встр}} = \frac{S}{v_1 + v_2},$$

получим с использованием формул для скоростей пешеходов

$$t_{\text{встр}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{1,2t}{2,2} = \frac{6t}{11} = 1,09 \text{ часа.}$$

Поскольку скорость пешехода, вышедшего из пункта А, равнялась S/t , то встреча пешеходов произойдёт на расстоянии

$$S_1 = v_1 t_{\text{встр}} = \frac{S}{t} \cdot \frac{6t}{11} = \frac{6S}{11} = 6,5 \text{ км.}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное использование формулы «расстояние-время-скорость» - 1 балл
 2. Правильно найдено скорость первого и второго пешеходов – 1 балл
 3. Правильно получена (или использована) формула для времени встречи - 1 балл
 4. Правильный ответ для времени встречи пешеходов (формула и число) – 1 балл
 5. Правильный ответ для расстояния между А и точкой встречи пешеходов (формула и число) – 1 балл
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Так как пружины невесомы, сумма внешних сил, действующих на каждый элемент пружин, должна равняться нулю. В частности, равна нулю сумма сил, действующих на мысленно выделенный кусочек двух пружин, содержащий точку их соединения. Поэтому силы упругости пружин одинаковы в любой момент времени. Это значит, что удлинение пружины с жесткостью k в любой момент времени вдвое больше удлинения пружины с жесткостью $2k$. Поэтому точка соединения пружин движется в сторону более жесткой пружины – ведь если бы она стояла на месте удлинения пружин были бы одинаковы, а у жесткой пружины оно меньше. Пусть перемещение точки соединения пружин равно Δx . Тогда удлинение пружины с жесткостью k равно $vt + \Delta x$, пружины с жесткостью $2k$ – $vt - \Delta x$. И поскольку удлинения пружин отличаются вдвое, для Δx справедливо уравнение

$$\frac{1}{2}(vt + \Delta x) = vt - \Delta x$$

Отсюда находим величину Δx

$$\Delta x = \frac{1}{3}vt$$

и скорость точки соединения

$$v_0 = \frac{\Delta x}{t} = \frac{1}{3}v.$$

Направлена эта скорость в сторону более жесткой пружины.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное условие, что силы упругости пружин в любой момент времени одинаковы - 1 балл
 2. Правильное использование формулы «расстояние-время-скорость» – 1 балл
 3. Правильное определение направления скорости точки соединения пружин – в сторону более жесткой пружины – 1 балл
 4. Правильное соотношение удлинений пружин – 1 балл
 5. Правильный ответ – 1 балл
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Пусть скорости лодок в стоячей воде равны v_1 и v_2 , скорость течения реки u . Поскольку скорость относительно земли для лодки, плывущей по течению, складывается со скоростью течения, а для лодки, плывущей против течения, вычитается, из формулы, связывающей расстояние, время и скорость, получим для утреннего и вечернего заплывов

$$\begin{cases} \frac{l}{2(v_1 - u)} = \frac{l}{2(v_2 + u)} \\ \frac{l}{3(v_2 - u)} = \frac{2l}{3(v_1 + u)} \end{cases}$$

где l - расстояние между городами. Отсюда

$$\begin{cases} v_2 + u = v_1 - u \\ v_1 + u = 2v_2 - 2u \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдём

$$v_2 = \frac{5}{7} v_1 = 14,3 \text{ км/час}, \quad u = \frac{1}{7} v_1 = 2,9 \text{ км/час}.$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное использование формулы «расстояние-время-скорость» - 1 балл
 2. Правильное нахождение скоростей лодок при их движении по и против течения – 1 балл
 3. Правильное система уравнений для времен встречи лодок утром и вечером (правильная система уравнений для скоростей) – 1 балл
 4. Правильный ответ для скорости второй лодки (формула и число) – 1 балл
 5. Правильный ответ для скорости первой лодки (формула и число) – 1 балл
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункт

5. Чтобы блок с массой m был в равновесии, сила натяжения T нити, охватывающей этот блок, должна быть равной половине силы тяжести, действующей на этот блок

$$T = \frac{1}{2} mg .$$

Поэтому на блок массой m_1 действуют: сила тяжести $m_1 g$, сила T со стороны нити, прикрепленной к его оси (эти силы направлены вниз), и две силы T , направленные вверх. Поэтому чтобы этот блок находился в равновесии, должно быть выполнено условие

$$T + m_1 g = 2T$$

Отсюда

$$m_1 g = T = \frac{1}{2} mg \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{2} m$$

Следовательно, третий блок должен иметь массу, равную половине массы нижнего блока.

Сила натяжения нити, действующая на безмен, равна силам, действующим вниз на верхний блок. На него действуют сила тяжести $2mg$ и две силы T натяжения нити, охватывающей этот блок:

$$2mg + 2T = 3mg$$

Поэтому показания безмена составят $3m$.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное условие равновесия – сумма сил, действующих на каждое тело, равна нулю - 1 балл
 2. Из условия равновесия нижнего блока правильно найдена сила натяжения нити – 1 балл
 3. Правильный ответ для массы правого блока – 1 балл
 4. Правильная идея нахождения показаний безмена – он показывает силу, с которой его тянут, деленную на g – 1 балл
 5. Правильный ответ для показаний безмена – 1 балл
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.