

Решения и критерии оценивания решений задач

1. На пачках бумаги приводится так называемая поверхностная плотность бумаги – отношение массы листа к его площади

$$\sigma = \frac{m}{S}$$

Эта величина, имеющая размерность кг/м² представляет собой массу единицы площади (квадратного метра) бумаги. Связь объёмной ρ и поверхностной плотности σ можно установить, найдя, например, массу листа через объёмную и поверхностную плотность. Имеем

$$m = \rho V = \rho dS \quad \text{и также} \quad m = \sigma S$$

где d - толщина листа бумаги, S - его площадь. Отсюда

$$\rho d = \sigma$$

Поскольку объёмная плотность офисной бумаги составляет $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$, из последней формулы находим толщину листа бумаги

$$d = \frac{\sigma}{\rho} = 10^{-4} (\text{м}) = 0,1 \text{ мм}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное понимание того, что такое поверхностная плотность - 1 балл

2. Правильное понимание того, что такое объёмная плотность – 2 балл

3. Правильная идея решения – выражение массы листа через поверхностную и объёмную плотность – 1 балл

4. Правильный ответ (формула) – 1 балл

5. Правильный ответ (число) – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Массовой концентрацией раствора кислоты в воде называется отношение массы чистой кислоты в растворе к массе всего раствора

$$C = \frac{m}{m + M}$$

где m - масса кислоты, M - масса воды (и, соответственно, $m + M$ - масса всего раствора). С другой стороны, плотность раствора определяется как отношение его массы к его объёму

$$\rho = \frac{m + M}{\frac{m}{2\rho_s} + \frac{M}{\rho_s}} = \frac{(m + M)2\rho_s}{m + 2M}$$

Отсюда находим массу воды в растворе

$$M = \frac{m(2\rho_s - \rho)}{2(\rho - \rho_s)}$$

Используя теперь определение концентрации раствора, получим

$$C = \frac{m}{m + M} = \frac{m}{m + \frac{m(2\rho_s - \rho)}{2(\rho - \rho_s)}} = \frac{2(\rho - \rho_s)}{\rho} = 0,33 = 33\%$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное понимание того, что такое концентрация раствора - 1 балл

2. Правильное понимание того, что такое средняя плотность – 2 балл

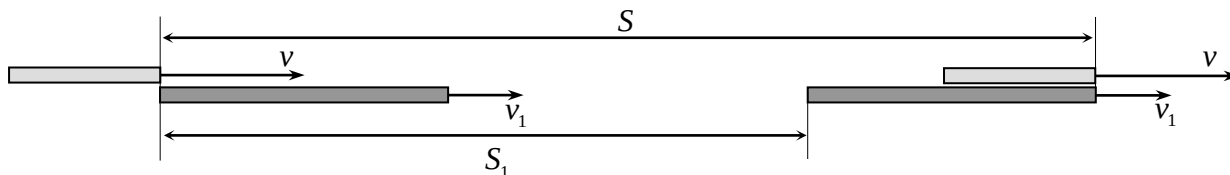
3. Правильное соотношение для средней плотности – 1 балл

4. Правильно найдена масса воды (через массу кислоты) или наоборот – 1 балл

5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Пусть длина товарного поезда l , а его скорость - v_1 . Очевидно, интервал времени Δt - это интервал времени между событиями, изображенными на правом и левом рисунках, на которых электричка показана светло-серым прямоугольником, товарный поезд – темно-серым.



Из этого рисунка очевидно, что разность расстояний, пройденных поездами за время Δt - это длина товарного поезда

$$l = S - S_1 = v\Delta t - v_1\Delta t = (v - v_1)\Delta t_1 \quad (*)$$

Когда электричка будет двигаться навстречу товарному поезду, то для времени, в течение которого машинист электрички будет находится рядом с товарным поездом имеем похожую формулу, но со знаком «плюс»:

$$l = (v + v_1) \frac{\Delta t_1}{6}$$

Приравнивая две этих формулы, получим уравнение

$$v - v_1 = \frac{1}{6}(v + v_1)$$

Отсюда находим скорость товарного поезда

$$v_1 = \frac{5}{7}v = 50 \text{ км/ч,}$$

а из формулы (*) его длину

$$l = (v - v_1)\Delta t_1 = \frac{2}{7}v\Delta t_1 = 333 \text{ м}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное использование формул «расстояние-время-скорость» - 1 балл

2. Правильное соотношение для времени обгона товарного поезда при параллельном движении – 1 балл

3. Правильное соотношение для времени обгона товарного поезда при встречном движении – 1 балл

4. Правильный ответ для скорости товарного поезда (и формула, и число) – 1 балл

5. Правильный ответ для длины товарного поезда (и формула, и число) – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Пусть теплоемкости воды и чайника равны C_1 и C_2 соответственно, мощность нагревателя - P .

Тогда для нагревания воды и чайника в первом случае имеем

$$Pt_1 = (C_1 + C_2)(T_k - T_0)$$

где $T_k = 100^\circ\text{C}$ – температура кипения воды. Поскольку теплотери отсутствуют, то вся внутренняя энергия, которая осталась в системе после выливания воды в ней и дальше останется. А

в ней остался чайник, нагретый до $T_k = 100^\circ \text{C}$. Значит, можно считать, что во втором случае мы грели только воду. Поэтому уравнение теплового баланса для второго нагревания дает

$$P \frac{3}{4} t_1 = C_1 (T_k - T_0)$$

Деля эти формулы друг на друга, получим

$$\frac{4}{3} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} = 1 + \frac{C_2}{C_1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 3C_2$$

Теперь можно записать уравнение теплового баланса для наливания в чайник с температурой кипения воды воды с комнатной температурой. Имеем

$$C_1 (T_x - T_0) = C_2 (T_k - T_x)$$

где T_x - искомая температура. Подставляя в это уравнение соотношение теплоемкостей чайника и воды, получим

$$T_x = \frac{1}{4} (3T_0 + T_k) = 40^\circ \text{C}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

- 1. Правильное уравнение теплового баланса для первого нагревания воды с чайником - 1 балл**
 - 2. Правильное уравнение теплового баланса для второго нагревания – 1 балл**
 - 3. Правильно найдено отношение теплоемкостей воды и чайника (если в случае второго нагревания школьник писал уравнение теплового баланса по-другому, но отношение теплоемкостей нашел правильно, и за второй, и за третий пункт ему следует поставить полный балл) – 1 балл**
 - 4. Правильное уравнение теплового баланса для наливания в горячий чайник воды комнатной температуры – 1 балл**
 - 5. Правильная температура воды и чайника – 1 балл**
- Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.**

5. Когда мы положим груз на поршень в левом колене сосуда, он опустится вниз, а поршень в правом колене – вверх. Условие равновесия груза на левом поршне имеет вид

$$\frac{mg}{S} = \rho g (\Delta h + \Delta x)$$

где m - масса груза, ρ - плотность жидкости, Δh - величина опускания левого поршня по сравнению с его положением при отсутствии груза, Δx - величина подъема поршня в правом колене. Поскольку уменьшение объема жидкости в левом колене равно увеличению объема жидкости в правом, Δh и Δx связаны очевидным соотношением

$$\Delta h S = \Delta x 4S$$

Подставляя величину Δx из этой формулы в условие равновесия груза, найдем

$$\Delta h = \frac{4m}{5\rho S} \quad (*)$$

Когда мы кладем тот же груз на поршень в правом колене, условие его равновесия имеем похожий вид

$$\frac{mg}{4S} = \rho g(\Delta h_1 + \Delta x_1)$$

где Δh_1 - величина опускания правого поршня по сравнению с его положением при отсутствии груза,

Δx_1 - величина подъёма поршня в левом колене. Связь этих величин даст

$$\Delta h_1 4S = \Delta x_1 S$$

Аналогично находим, на сколько опустился правый поршень (по сравнению с начальным уровнем), если на него положить тот же груз (убрав его с левого поршня)

$$\Delta h_1 = \frac{m}{20\rho S} \quad (**)$$

Сравнивая формулы (*) и (**), находим

$$\Delta h_1 = \frac{\Delta h}{16}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

- 1. Правильное условие равновесия груза на левом поршне - 1 балл**
- 2. Правильная связь опускания левого и подъёма правого поршня при размещении груза на левом поршне – 1 балл**
- 3. Правильное условие равновесия груза на правом поршне – 1 балл**
- 4. Правильная связь опускания правого и подъёма левого поршня при размещении груза на правом поршне – 1 балл**
- 5. Правильный ответ – 1 балл**

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.

Решения и критерии оценивания решений задач

1. Пусть искомая температура смеси равна t_x . Тогда порции воды получили следующие количества теплоты:

$$\text{массой } m \quad Q_m = cm(t_x - t)$$

$$\text{массой } 2m \quad Q_{2m} = c2m(t_x - 2t)$$

$$\text{массой } 4m \quad Q_{4m} = c4m(t_x - 4t)$$

$$\text{массой } 5m \quad Q_{5m} = c5m(t_x - 5t)$$

(какие-то из них являются отрицательными). Поскольку сосуд теплоизолирован, уравнение теплового баланса дает

$$Q_m + Q_{2m} + Q_{4m} + Q_{5m} = 0$$

или

$$cm(t_x - t) + c2m(t_x - 2t) + c4m(t_x - 4t) + c5m(t_x - 5t) = 0$$

Решая это уравнение, находим

$$t_x = \frac{23t}{6} = 38,3^\circ \text{C}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное использование формулы для количества полученной теплоты - 1 балл
2. Правильная идея решения – использовать уравнение теплового баланса для полученных теплот, не определяя заранее, какая порция получала, а какая отдавала тепло – 1 балл
3. Правильное уравнение теплового баланса – 1 балл
4. Правильный ответ (формула) – 1 балл
5. Правильный ответ (число) – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Поскольку новая проволока получена из старой с помощью «вытягивания», то её масса и объём не меняются. Приравнявая объёмы старой и новой проволок, получим

$$lS = nlS_1$$

где l и S – длина и площадь поперечного сечения старой проволоки, nl и S_1 – длина и площадь поперечного сечения новой проволоки. Отсюда находим

$$S_1 = \frac{S}{n}$$

Применяя теперь соотношение, связывающее сопротивление проводника с его геометрическими параметрами, получим новое сопротивление проволоки

$$R_1 = \frac{\rho nl}{S_1} = \frac{\rho l}{S} n^2 = n^2 R = 45,1 \text{ Ом}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное использование формулы, связывающей сопротивление проволоки с ее длиной и площадью поперечного сечения - 1 балл

2. Правильно понято, что объемы старой и новой проволок одинаковы – 1 балл

3. Правильно найдена площадь поперечного сечения новой проволоки - 1 балл

4. Правильный ответ (формула) – 1 балл

5. Правильный ответ (число) – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Так как пружины невесомы, сумма внешних сил, действующих на каждый элемент пружин, должна равняться нулю. В частности, равна нулю сумма сил, действующих на мысленно выделенный кусочек двух пружин, содержащий точку их соединения. Поэтому силы упругости пружин одинаковы в любой момент времени. Это значит, что удлинение пружины с жесткостью k в любой момент времени вдвое больше удлинения пружины с жесткостью $2k$. Поэтому точка соединения пружин движется в сторону более жесткой пружины – ведь если бы она стояла на месте удлинения пружин были бы одинаковы, а у жесткой пружины оно меньше. Пусть перемещение точки соединения пружин равно Δx . Тогда удлинение пружины с жесткостью k равно $vt + \Delta x$, пружины с жесткостью $2k$ - $vt - \Delta x$. И поскольку удлинения пружин отличаются вдвое, для Δx справедливо уравнение

$$\frac{1}{2}(vt + \Delta x) = vt - \Delta x$$

Отсюда находим величину Δx

$$\Delta x = \frac{1}{3}vt$$

и скорость точки соединения

$$v_0 = \frac{\Delta x}{t} = \frac{1}{3}v.$$

Направлена эта скорость в сторону более жесткой пружины.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное условие, что силы упругости пружин в любой момент времени одинаковы - 1 балл

2. Правильное использование формулы «расстояние-время-скорость» – 1 балл

3. Правильное определение направления скорости точки соединения пружин – в сторону более жесткой пружины – 1 балл

4. Правильное соотношение удлинений пружин – 1 балл

5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Чтобы блок с массой m был в равновесии, сила натяжения T нити, охватывающей этот блок, должна быть равной половине силы тяжести, действующей на этот блок

$$T = \frac{1}{2}mg.$$

Поэтому на блок массой m_1 действуют: сила тяжести m_1g , сила T со стороны нити, прикрепленной

к его оси (эти силы направлены вниз), и две силы T , направленные вверх. Поэтому чтобы этот блок находился в равновесии, должно быть выполнено условие

$$T + m_1 g = 2T$$

Отсюда

$$m_1 g = T = \frac{1}{2} mg \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{2} m$$

Следовательно, третий блок должен иметь массу, равную половине массы нижнего блока.

Сила натяжения нити, действующая на безмен, равна силам, действующим вниз на верхний блок. На него действуют сила тяжести $2mg$ и две силы T натяжения нити, охватывающей этот блок:

$$2mg + 2T = 3mg$$

Поэтому показания безмена составят $3m$.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Правильное условие равновесия – сумма сил, действующих на каждое тело, равна нулю - 1 балл
2. Из условия равновесия нижнего блока правильно найдена сила натяжения нити – 1 балл
3. Правильный ответ для массы правого блока – 1 балл
4. Правильная идея нахождения показаний безмена – он показывает силу, с которой его тянут, деленную на g – 1 балл
5. Правильный ответ для показаний безмена – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Пусть расстояния, пройденные первым и вторым телом до встречи равны l_1 и l_2 соответственно.

Тогда из формул, связывающих пройденный путь, скорость и время, имеем

$$\begin{aligned} l_1 &= v_1 t \\ l_2 &= v_2 t \end{aligned} \quad (*)$$

где v_1 и v_2 - скорости тел, t - время, прошедшее от начала движения тел до их встречи. С другой стороны, те расстояния, которые прошли первое и второе тело от выхода из своих городов до встречи, равны расстояниям, которые прошли второе и первое тела от встречи до пунктов назначения. Поэтому

$$\begin{aligned} l_1 &= v_2 t_2 \\ l_2 &= v_1 t_1 \end{aligned} \quad (**)$$

Деля первое уравнение (*) на второе уравнение (**) и первое уравнение (**) на второе (*), получим

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{t}{t_1} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{t_2}{t}$$

Приравнивая эти формулы, получим

$$t = \sqrt{t_1 t_2}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Использование утверждения, что пути, пройденные до встречи первым и вторым телом, равны путям, пройденным вторым и первым телом от встречи до пунктов назначения - 1 балл
2. Правильное использование формул «расстояние-время-скорость» – 1 балл
3. Правильные формулы от выхода до встречи – 1 балл

4. Правильные формулы от встречи до пунктов назначения – 1 балл

5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.