Юные таланты (10 класс)

Задание 1 (6 баллов)
Замечено, что зимой при повышении температуры воздуха снег на крыше начинает таять, и образуются ледяные сталактиты (сосульки). При последующем понижении температуры процесс роста сосулек останавливается и начинается их истончение и заострение. Объясните процесс образования сосулек и их утончение в морозный период.

Решение:

В силу температурного запаздывания систем отопления при потеплении слой снега, контактирующий с крышей, из-за увеличившегося результирующего потока тепла начинает таять. Образующаяся вода бежит к карнизу, где замерзает из-за потери контакта с непосредственно отапливаемой частью крыши. Накапливаясь, замёрзшая вода формирует продолговатое ледяное образование (сосульку), что обусловлено скатыванием капель к вершине сосульки, на пути к которой она замерзает.

В морозный период вода на крыше замерзает, и процесс роста сосулек останавливается. Утончение и заострение сосулек в это время обусловлено сублимацией льда в окружающий воздух, при этом из-за открытости системы насыщения парами воды не происходит.

Критерий		**Балл**
Описан процесс роста сосулек	Подробно	3 б
	Скудно (отсутствует часть описания)	1 б
Описан процесс заострения и истончения сосулек	Подробно	3 б
	Скудно (отсутствует часть описания)	1 б

Задание 2 (8 баллов)
Шайба, скрепленная с длинной пружиной жёсткостью k = 20 Н/м, совершает колебания на горизонтальном столе (рис. 2.1- чёрным показано положение системы, в котором пружина не деформирована). На шайбу действует постоянная по модулю кулоновская сила трения (коэффициент трения равен 0,3). Найдите отрезок (его длину и положение), на котором поместятся центры масс всех шайб, выпущенных из промежутка начальных положений АБ. Масса шайбы составляет 100 г, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с

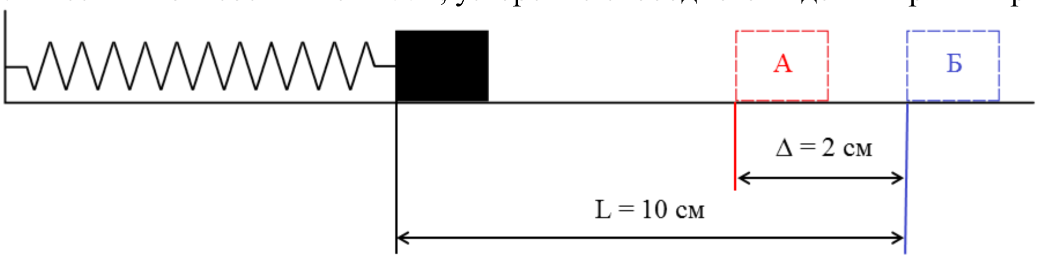

Рис. 2.1 .Шайба, скрепленная с пружиной на горизонтальном столе

Решение:
Найдём ширину зоны, в которой после остановки тело прекращает движение:

$$x_{ост} = \frac{\mu N}{k} = \frac{\mu m g}{k} \approx \frac{0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 10}{20}\ м = 1{,}5\ см \qquad (2.1)$$

Таким образом, шайба из любой точки диапазона АБ сможет начать движение. Она будет совершать затухающие колебания, пока не попадёт в область [-1,5; 1,5] см (в нуле пружина не растянута). Составим уравнение движения:

$$ma = -\mu N \frac{v}{|v|} - kx \qquad (2.2)$$

или

$$ma = \begin{cases} \mu N - kx, если\ v < 0 \\ -\mu N - kx, если\ v \geq 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Сделаем оценку числа полных колебаний, совершаемых грузами с начальными положениями из указанного диапазона. Вычислим работу сил до первой смены направления скорости, полагая, что s_0 – расстояние до положения ненагруженной пружины из начальной точки, s_1 – расстояние от указанного положения до точки смены направления скорости. В результате получим:

$$\frac{k{s_1}^2}{2} = \frac{k{s_0}^2}{2} - \mu mg(s_1 + s_0), \qquad (2.4)$$

откуда

$$s_1 = \sqrt{\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + s_0\left(s_0 - \frac{2\mu mg}{k}\right)} - \frac{\mu mg}{k},$$

$$s_1 = \sqrt{\left(s_0 - \frac{\mu mg}{k}\right)^2} - \frac{\mu mg}{k},$$

$$s_1 = \left|s_0 - \frac{\mu mg}{k}\right| - \frac{\mu mg}{k}. \qquad (2.5)$$

Видно, что если движение начинается не из «мёртвой зоны», то амплитуда колебаний за период уменьшается на постоянную величину, равную $\frac{2\mu mg}{k}$. В случае же, если величина под модулем будет положительна, но меньше, чем $\frac{\mu mg}{k}$, получим остановку шайбы на той же стороне от положения равновесия, где находится точка начала её движения в текущей итерации. Для самой удалённой точки промежутка получаем следующую последовательность отклонений s:

$$s_0 = 0{,}1\text{ м}$$
$$s_1 = 0{,}07\text{ м}$$
$$s_2 = 0{,}04\text{ м}$$
$$s_3 = 0{,}01\,м < x_{ост}$$

Отсюда заключаем, что шайбы из указанного диапазона совершат максимум один полный период. Для нижней границы промежутка получим:

$$s_0 = 0{,}08\,м$$
$$s_1 = 0{,}05\,м$$
$$s_2 = 0{,}02\,м$$
$$s_3 = -0{,}01\,м > -x_{ост}$$

Отсюда в силу монотонности отображения (2.5), обусловленного тем, что все такие шайбы совершат меньше одного полного колебания, но больше полуколебания, заключаем, что весь отрезок отобразится в интервал [-0.1; 0,1] см. Длина этого отрезка составит 0,2 см.

Критерий	**Балл**
Получена оценка ширины зоны остановки шайбы	1 б
Сделано замечание относительно поведение динамической системы в виде (2.2)-(2.3) или словесно.	1 б
Записан закон сохранения энергии с учётом специфики кулоновского трения в виде (2.4)	2 б
Получено соотношение (2.5)	1 б
Указана область применения соотношения (2.5), проанализированы граничные случаи	1 б
Показана монотонность отображения для данного диапазона начальных отклонений	1,5 б
Получено положение и длина конечного отрезка	0,5 б

Задание 3(8 баллов)

Артиллерийский снаряд, выпущенный под углом 45^0 к горизонту, разрывается на две одинаковые части в наивысшей точке траектории. Оба фрагмента продолжают движение в направлении полёта целого снаряда со скоростями $130\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}$ и $50\ ^{\text{м}}/_{\text{с}}$. Определите, на каком расстоянии упадут два осколка друг от друга. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение силы тяжести принять равным $10\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$.

Решение:

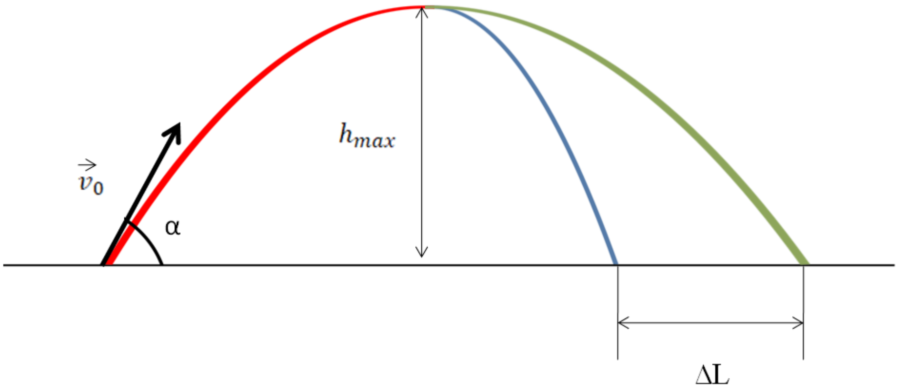

Рис. 3.1. Траектории снаряда и его осколков, полученных в результате разрыва

Рассматриваемый процесс схематически изображён на рисунке 3.1. Найдём высоту подъёма снаряда до наивысшей точки траектории:

$$h_{max} = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g}. \qquad (3.1)$$

Поскольку после его разрыва осколки продолжают полёт по касательной к траектории в этой точке, то можно записать следующую систему уравнений баллистики:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + v_1 t \\ y_1 = h_{max} - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_0 + v_2 t \\ y_2 = h_{max} - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad (3.3)$$

Полагая для определённости $v_1 > v_2$, вычтем выражения для x_1 и x_2 друг из друга:

$$x_1 - x_2 = (v_1 - v_2)t \qquad (3.4)$$

Как видно из системы, время падения обоих сегментов будет одинаковым. Тогда, выражая время падения через высоту разрыва снаряда, получим:

$$h_{max} = \frac{gt^2}{2},$$

$$\frac{v_0^2 sin^2\alpha}{g^2} = t^2.$$

Так как время падения и содержащиеся в левой части выражения величины положительны, то

$$\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} = t_{\text{пад}},$$

$$x_{1\text{пад}} - x_{2\text{пад}} = (v_1 - v_2)\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} = \Delta L. \qquad (3.5)$$

Применяя закон сохранения импульса для движений системы в наивысшей точке траектории, будем иметь:

$$m v_{0x} = \frac{m}{2} v_1 + \frac{m}{2} v_2 \qquad (3.6)$$

В то же время

$$v_{0x} = v_0 \cos(\alpha),$$

тогда

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2\cos(\alpha)}.$$

Окончательно получаем:

$$\Delta L = (v_1 - v_2)\frac{v_1+v_2}{2\cos(\alpha)}\frac{\sin(\alpha)}{g} = \frac{(v_1^2-v_2^2)tg(\alpha)}{2g} = \frac{130^2-50^2}{20} = 720 \text{ м} \qquad (3.7)$$

Критерий	**Балл**
Записана высота разрыва снаряда (3.1)	1 б
Корректно записана система уравнений баллистики для каждого из осколков (3.2)-(3.3)	2 б
Получено выражение для разлёта снарядов (3.4)	0.5 б
Получено выражение для расстояния между точками приземления снарядов (3.5)	2 б
Использован закон сохранения импульса (3.6)	1 б
Получено выражение для расстояния между точками падения снарядов (3.7)	1.5 б

Задание 4 (12 баллов)

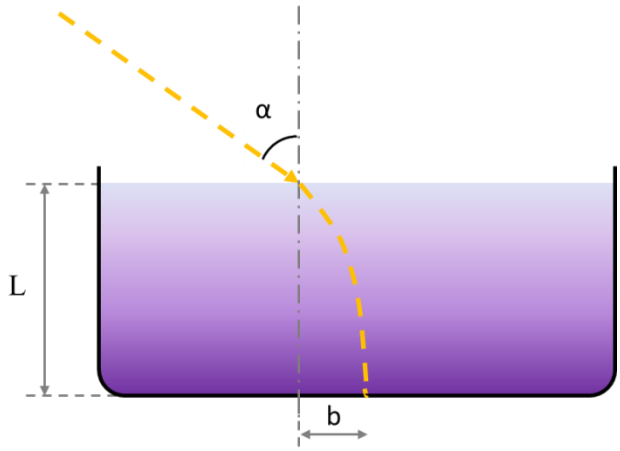

Рис.4.1. Кювета с раствором и примерный ход луча

Дан резервуар с водным раствором некоторого вещества (рис.4.1), распределение которого в объёме неоднородно: концентрация зависит только от глубины погружения (см. график на рис. 4.2). Исследуйте эффект преломления луча света в этом растворе (примерный ход луча представлен на рис. 4.1). Зависимость показателя преломления n от концентрации вещества показана на рис. 4.3, высота кюветы L = 4 м, угол падения луча $\alpha = 30^0$.

Постройте математическую модель явления. Дайте теоретически обоснованную количественную оценку величины b (рис.4.1) и величину допускаемой при этом ошибки.

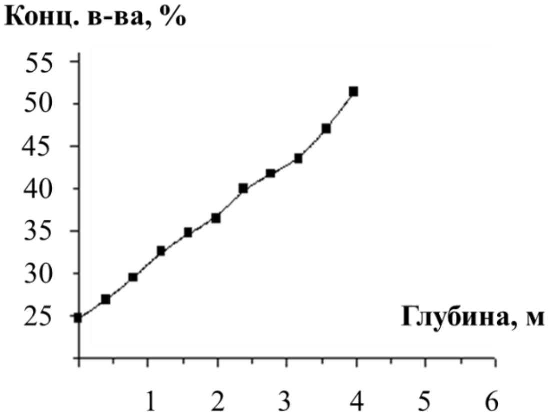

Рис.4.2. График зависимости концентрации раствора от глубины погружения.

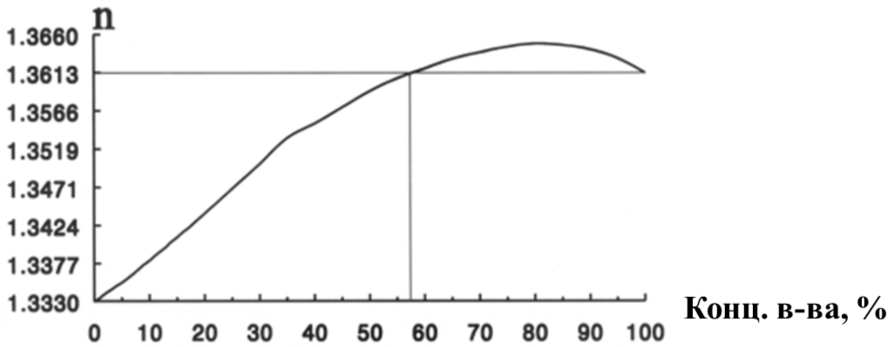

Рис.4.3. График зависимости показателя преломления от концентрации растворённого вещества.

Решение:

Разобьем весь объем жидкости на конечную группу слоёв. В каждом из них показатель преломления будем считать постоянным. При этом в связи с ростом показателя преломления с глубиной получится аппроксимация снизу, если значения n брать в верхней точке слоя, и сверху, если в нижней точке. Для каждой границы раздела выполняется классический закон преломления (рис. 4.4).

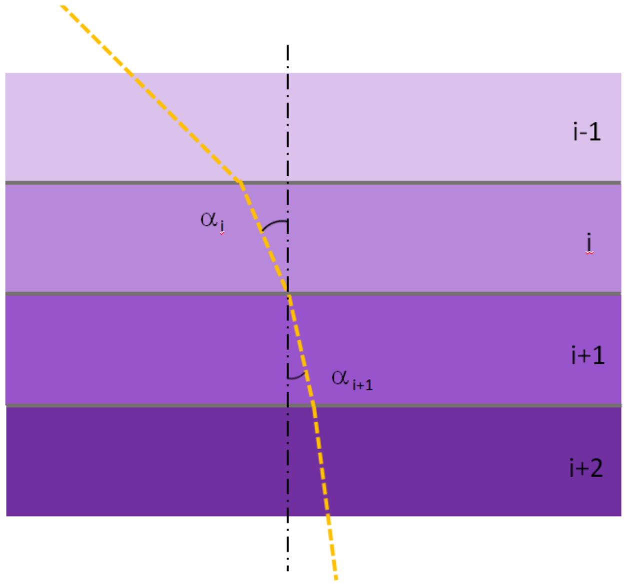

Рис. 4.4. Деление объема жидкости на слои

Отсюда будем иметь выражение:

$$\frac{\sin(\alpha_{i+1})}{\sin(\alpha_i)} = \frac{n_i}{n_{i+1}}, \text{или} \quad (4.1)$$

$$\sin(\alpha_{i+1})\, n_{i+1} - \sin(\alpha_i)\, n_i = \Delta_i(\sin(\alpha)\, n) = 0, \text{откуда следует}$$

$$sin(\alpha)\, n = \text{const} = C. \quad (4.2)$$

Далее обратимся к вычислению расстояния, проходимого лучом параллельно дну (соответствующее отклонение обозначим за y, а удаление в глубину за x). Для i-го слоя получим:

$$y_i = x_i tg(\alpha_i), \quad (4.3)$$

где выражая тангенс через синус и переходя к показателю преломления n, придём к следующему соотношению отклонений на i-м слое:

$$y_i = x_i \frac{C}{\sqrt{{n_i}^2 - C^2}}. \quad (4.4)$$

Далее есть несколько вариантов оценки итогового отклонения:

Первый способ заключается в определении массива значение $n_i(x_i)$ по графикам. **Второй** – в выделении линейных трендов, например:

$$Конц.вещ. = 25 + (50 - 25) * \frac{x}{4},$$

$$n = 1{,}3330 + (1{,}3613 - 1{,}3330) * \frac{Конц.вещ.}{60} = 1{,}3448 + 0{,}0030x.$$

Постоянную С можно найти из условий на поверхности:

$$\sin(\alpha(0))\, n(0) = C = \sin(30) * 1{,}3471 \approx 0.6736,$$

тогда зависимость горизонтального отклонения от глубины примет вид:

$$\Delta y = \Delta x \frac{0.6736}{\sqrt{(1{,}3448 + 0{,}0030x\ )^2 - 0.6736^2}}.$$

После чего необходимо просуммировать и перейти к пределу $\Delta x \to 0$:

$$b = \int_0^L \frac{0.6736}{\sqrt{(1{,}3448 + 0{,}0030x\ )^2 - 0.6736^2}} dx.$$

После вычисления интеграла (интеграл табличный), получаем:

$$b = \frac{0{,}6736}{0{,}0030} \ln \left| \frac{1{,}3448 + 0{,}0030L + \sqrt{(1{,}3448 + 0{,}0030L)^2 - 0.6736^2}}{1{,}3448 + \sqrt{(1{,}3448)^2 - 0.6736^2}} \right|, \text{тогда}$$

$$b \approx 2{,}301\ м \tag{4.5}$$

Относительно количественной оценки ошибки предлагается анализ ошибки определения аппроксимативной кривой (сумма квадратов отклонений) и анализ чувствительности решения от числа знаков **во втором варианте решения**. И указание доверительного диапазона (оценка на b снизу и сверху в зависимости от взятия $n_i(x_i)$ в верхней и нижней точках слоя, соответственно) **в первом варианте решения**.

Критерий	**Балл**
Записан закон преломления лучей на границе (4.1) безотносительно разбиения объёма на совокупность слоёв.	1 б
Сделан переход к разбиению на слои	3 б
Получено соотношение (4.2)	0,5 б
Получена соотношение (4.3)	0,5 б
Получено соотношение (4.4)	0,5 б
Получены уравнения для линий тренда, либо получены суммы для отклонения y_i	1,5 б
Проведена корректная оценка величины b	1 б
В случае вычисления значения через интеграл - проведены оценки допускаемой ошибки	*2 б*
В случае вычисления сумм, приведены рассуждения о верхней и нижней суммах и получен доверительный интервал	*2 б*
Результат получен через усреднение показателя преломления во всём объёме	*+2 б (макс)*
Приведён подробный анализ качественной картины явлений в системе	*+1,5 б (макс)*