



ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

Салон сотовой связи продал 495 телефонов, базовая цена каждого из которых составляла 5000 руб. При этом каждый m -й продаваемый телефон был акционный и продавался со скидкой равной 500 руб. Покупатель каждого третьего акционного телефона получал, сверх того, и дополнительную скидку в размере 750 руб. Определите число m , если итоговая выручка салона от продажи телефонов составила 2 413 750 руб.

Решение.

Пусть x - количество телефонов, проданных с максимальной ($500 + 750 = 1250$ руб.) скидкой. Количество остальных акционных телефонов тогда выражается формулой $2x + r$, где $r \in \{0, 1, 2\}$. При этом общая сумма скидок, равная $1250x + 500(2x + r) = 2250x + 500r$ (руб.), равна с другой стороны $495 \cdot 5000 - 2413750 = 61250$ (руб.).

Уравнение $2250x + 500r = 61250$ при $r = 0$ и $r = 2$ не имеет целых корней, а при $r = 1$ получается $x = 27$. Искомое m теперь находим как неполное частное от деления 495 на $27 + 2 \cdot 27 + 1 = 82$.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Составлено какое-либо правильное уравнение относительно m (или тесно связанной с m величины) и показано, что $m = 6$ ему удовлетворяет.	+/-	7
Приведены расчеты, показывающие, что возможно равенство $m = 6$.	-/+	3
Составлено какое-либо правильное уравнение, но дальше продвижений нет.	-/.	2

Задание 2 (10 баллов)

Решите уравнение $\sin(\sin x) = \sin(1 + \cos x)$.

Решение.

Для данного равенства возможны два случая.

$$1. \sin x = 1 + \cos x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ при этом } |2\pi k| = |\sin x - \cos x - 1| \leq 1 + |\sin x - \cos x| = 1 + \sqrt{2} \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 1 + \sqrt{2} < 2\pi.$$

Отсюда $k = 0$. Далее, $\sin x = 1 + \cos x \rightarrow \sin x - \cos x = 1 \rightarrow$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \sin x + 1 + \cos x = \pi(2k + 1).$$

Поскольку $|\sin x + 1 + \cos x| < 3 < \pi \leq |\pi(2k + 1)|$,

то в этом случае решений нет.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Задача в основном решена, необходимые неравенства указаны, но не доказаны	+/-	8
Ход решений верный, но при выписывании корней допущены ошибки	-/+	4
С самого начала (и до конца решения) рассматривался только один из двух возможных случаев.	-/.	2

Задание 3 (12 баллов)

Десятичная запись суммы $3 + 33 + 333 + \dots + 33\dots3$ оканчивается на 2023. Каким наименьшим может быть количество цифр в последнем слагаемом?

Решение.

Указанную сумму обозначим через S , а количество слагаемых в ней (совпадающее с количеством цифр в последнем слагаемом) - через n . Тогда сумма остатков слагаемых от деления на 10 000 равна $369 + 3333(n - 3)$, и дает

при делении на 10 000 равна $369 + 3333(n - 3)$ и дает при делении на 10 000 такой же остаток, что и S .

Поэтому выполнено равенство $369 + 3333(n - 1) = 10000m + 2023$, где m - некоторое натуральное число.

Отсюда

$$\begin{aligned} n - 3 &= \frac{10\,000\,m + 2023 - 369}{3333} = 3m + \frac{m + 1654}{3333} \\ &= 3(3333k - 1654) + k = 10000k - 4962, \end{aligned}$$

где $k = \frac{m+1654}{3333}$ - натуральное число.

При $k=1$ получается $n = 10\,000 - 4962 + 3 = 5041$.

Ответ: 5041

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Ход решений верный, но допущены ошибки в вычислениях	+/-	7-9
Верно составлено уравнение, но дальше продвижений нет	-/+	3
Отмечено, что можно ограничиться рассмотрением остатков по модулю 10 000, но дальше продвижений нет	-/.	1

Задание 4 (12 баллов)

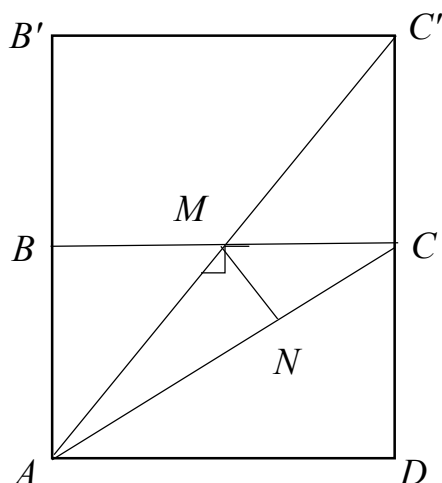
На поверхности куба $ABCD A'B'C'D'$ построена замкнутая линия, каждая точка X которой обладает следующим свойством: длина кратчайшего пути по поверхности куба между точками X и A равна длине кратчайшего пути по поверхности куба между X и C' . Найдите длину этой линии, если длина ребра куба равна 1.

Решение.

Из соображений симметрии ясно, что ребрами $A'B'$, $B'B$, BC , CD , DD' , $D'A'$ и отрезками AB' , AC , AD' , $C'B$, $C'A'$, $C'D$ линия, о которой идет речь в условии задачи, разбивается на 12 равных частей. Поэтому достаточно рассмотреть точки, принадлежащие треугольнику ABC .

Пусть P - одна из таких точек. Тогда кратчайшим путем между P и A служит отрезок PA , а кратчайшим путем между P и C' - двухзвенная ломаная PKC' , вершина K которой принадлежит ребру BC (в случае $P \in BC$ имеем просто

отрезок PC'). На ребрах куба объединение граней $ABCD$ и $BB'CC'$ представляет собой прямоугольник $AB'C'D$, а ломаная PKC' - отрезок PC' в нем. Условие $PA = PC'$ означает, что P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC' ; этот перпендикуляр пересекается с треугольником ABC по отрезку MN , где M середина ребра BC , а N - точка на отрезке AC , $\angle AMN = 90^\circ$ (см рисунок).



Найдем длину отрезка MN .

Из равенств $\operatorname{tg} \angle BAM = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$, $\angle MAN = 45^\circ - \angle BAM$,
и формулы тангенса разности углов получаем

$$\operatorname{tg} \angle MAN = \frac{1}{3},$$

откуда

$$MN = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} \sqrt{AB^2 + BM^2} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

Умножив это число на 12, получим ответ к задаче.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Приведено правильное построение линии, но длина линии не найдена или найдена неверно в результате ошибок в вычислениях.	+/-	8-10
Отмечено, что линия является 12-звенной ломаной	-/.	1

Задание 5 (12 баллов)

При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\log_x 5} - \frac{1}{\log_y 5} = 1, \\ y = ax^2 + x + 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Область допустимых значений переменных задается условиями

$$x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1.$$

Из первого уравнения получаем

$$\log_5 x - \log_5 y = 1, \log_5 \frac{x}{y} = 1, x = 5y$$

При $x = 5y$ второе уравнение системы имеет вид

$$25ay^2 + 4y + 1 = 0.$$

Ясно, что если $a \geq 0$, то $y < 0$, и система не имеет решений.

При $a < 0$ уравнение $25ay^2 + 4y + 1 = 0$ имеет ровно один положительный корень, причем исходная система тогда и только тогда не имеет решений, когда этот корень равен $\frac{1}{5}$ или 1.

Первое из этих чисел является корнем при $a = -\frac{9}{5}$, второе при $a = -\frac{1}{5}$.

Ответ: при $a \in \left\{-\frac{9}{5}, -\frac{1}{5}\right\} \cup [0; +\infty)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Ход решения верный, но не найдено одно из изолированных чисел.	+/-	8
Начало решения верное, но в итоге получен неверный ответ $a \in [0; +\infty)$.	-/+	2

Задание 6 (14 баллов)

В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AM и CN , а также высоты AP и CQ . Известно, что $MP = NQ$ и что радиус окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC , равен 1. Найдите периметр треугольника ABC .

Решение.

Докажем, что $\angle ABC = 60^\circ$. Для этого положим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ и воспользуемся формулами $BC = 2R \sin \alpha$, $AB = 2R \sin \gamma$, где R - радиус описанной окружности треугольника ABC .

Имеем

$$\begin{aligned} MP &= |CM - CP| = \\ &= \left| \frac{1}{2} BC - CP \right| = |R \sin \alpha - 2R \sin \beta \cos \gamma| = R |\sin(\beta + \gamma) - 2 \sin \beta \cos \gamma| = \\ &= R |\cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma| = R |\sin(\beta - \gamma)| = R \sin |\beta - \gamma|. \end{aligned}$$

Аналогично

$$NQ = R \sin |\beta - \alpha|.$$

Поэтому $\sin |\beta - \gamma| = \sin |\beta - \alpha|$.

Поскольку из условия задачи вытекают соотношения

$$|\beta - \gamma| < 90^\circ, |\beta - \alpha| < 90^\circ \text{ и } \gamma \neq 0,$$

то $\beta - \gamma = -(\beta - \alpha)$, откуда $2\beta = \alpha + \gamma$.

С учетом равенства $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ это означает, что $\beta = 60^\circ$.

Теперь найдем периметр треугольника ABC .

Пусть окружность с центром O касается стороны AC в точке K , а продолжений сторон BA и BC – в точках S и T соответственно.

Тогда $AK = AS$, $CK = CT$ и

$$AB + BC + AC = AB + BC + CT = BC + BT = 2 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = 2 \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Установлено равенство $\angle B = 60^\circ$, но периметр треугольника не найден	+/-	7
Равенство $\angle B = 60^\circ$ не доказано, но с его использованием найден периметр.	-/+	2

Задание 7 (14 баллов)

Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 18x + 45}.$$

Решение.

Область определения функции $f(x)$ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 45 \geq 0, \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция $f(x)$ определена при $x \in (-\infty; 3] \cup [15; +\infty)$.

Производная функции равна

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} + \frac{2x - 18}{\sqrt{x^2 - 18x + 45}}$$

Заметим, что $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 3]$ и $f'(x) > 0$ при $x \in [15; +\infty)$.

Итак, функция $f(x)$ возрастает на множестве $[15; +\infty)$ и убывает на множестве $(-\infty; 3]$.

Таким образом наименьшее значение функция достигает в одной из точек $x = 3$ или $x = 15$.

Поскольку $f(3) = 5 < f(15) = \sqrt{481}$, то наименьшее значение равно 5.

Ответ: 5

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Получен верный ответ, но доказательство неравенства $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 3]$ неполное.	+/-	10 - 12
Получен верный ответ, но не доказано, что производная $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 3]$. Доказано, что $f'(x) > 0$ при $x \in [15; +\infty)$.	-/+	6
Отмечено, но не доказано, что функция принимает минимальное значение на границе области определения. Имеются определенные продвижения в доказательстве этого факта.	-/.	2

Задача 8 (16 баллов)

На плоскости отмечено 8 различных точек, среди которых есть красные, синие и зеленые. Точек других цветов нет. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 12, между красными и зелеными равна 10, а между синими и зелеными равна 1. Каким может быть количество красных отмеченных точек?

Решение.

Пусть отмечены красные точки $A_1, \dots, A_p$, синие точки $B_1, \dots, B_q$, и зеленые точки $C_1, \dots, C_r$.

Поскольку для каждой точки $(A_i B_j C_k)$ выполняется неравенство треугольника $A_i B_j \leq A_i C_k + B_j C_k$,

то

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r A_i B_j \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (A_i C_k + B_j C_k)$$

Откуда

$$12r \leq 10q + p.$$

Аналогично, просуммировав неравенства $A_i C_k \leq A_i B_j + B_j C_k$, получим

$$10q \leq 12r + p.$$

Далее перебором можно установить, что найденным соотношениям и равенству $p + q + r = 8$ удовлетворяют ровно две тройки натуральных чисел

$$p = 4, q = 2, r = 2 \text{ и } p = 6, q = 1, r = 1.$$

Покажем, что оба найденных варианта могут быть реализованы на прямой.

Каждую из отмеченных точек будем задавать ее координатой.

Первый вариант:

$$A_1 = 1, A_2 = \frac{5}{4}, A_3 = \frac{3}{2}, A_4 = \frac{5}{2}, B_1 = 0, B_2 = \frac{1}{8}, C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = \frac{3}{8}$$

Второй вариант:

$$A_1 = \frac{1}{5}, A_2 = \frac{2}{5}, A_3 = \frac{3}{5}, A_4 = \frac{4}{5}, A_5 = 3, A_6 = 7, B_1 = 0, C_1 = 1$$

Ответ: 4 или 6

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	16
Установлено, что все числа, кроме 4 и 6 не подходят. Примеров нет.	+/-	12
Если пример(ы) для 4 и/или 6 красных точек	-/+	по 3 за каждый вариант



ОЧНЫЙ ЭТАП

11 класс

Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

Фитнес-центр продал 515 годовых абонементов, базовая цена каждого из которых составляла 8000 рублей. При этом каждый m -й продаваемый абонемент был акционный и продавался со скидкой равной 1000 руб. Покупатель каждого четвертого акционного абонемента получал, сверх того, и дополнительную скидку в размере 1500 руб. Определите число m , если итоговая выручка фитнес-центра от продажи абонементов составила 3 979 500 руб.

Решение.

Пусть x - количество абонементов, проданных с максимальной ($1000 + 1500 = 2500$ руб.) скидкой. Количество остальных акционных абонементов тогда выражается формулой $3x + r$, где $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. При этом общая сумма скидок, равная $2500x + 1000(3x + r) = 5500x + 1000r$ (руб.), равна с другой стороны $515 \cdot 8000 - 39795000 = 140500$ (руб.).

Уравнение $5500x + 1000r = 140500$ при $r = 0, 1, 2$ не имеет целых корней, а при $r = 3$ получается $x = 25$. Искомое m теперь находим как частное от деления 515 на $25 + 3 \cdot 25 + 3 = 103$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Составлено какое-либо правильное уравнение относительно m (или тесно связанной с m величины) и показано, что $m = 5$ ему удовлетворяет.	+/-	7
Приведены расчеты, показывающие, что возможно равенство $m = 5$.	-/+	3
Составлено какое-либо правильное уравнение, но дальше продвижений нет.	-/.	2

Задание 2 (10 баллов)

Решите уравнение $\sin(\cos x) = \sin(1 + \sin x)$.

Решение.

Для данного равенства возможны два случая.

1. $\cos x = 1 + \sin x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; при этом $|2\pi k| = |1 + \sin x - \cos x| \leq 1 + |\sin x| + |\cos x| \leq 1 + 1 + 1 \leq 2\pi$. Отсюда $k = 0$. Далее, $\cos x = 1 + \sin x \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2. $\cos x + 1 + \sin x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Поскольку $|\cos x + 1 + \sin x| \leq |\cos x| + 1 + |\sin x| \leq 1 + 1 + 1 < \pi \leq |\pi + 2\pi k|$, то в этом случае решений нет.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Задача в основном решена, необходимые неравенства указаны, но не доказаны	+/-	8
Ход решений верный, но при выписывании корней допущены ошибки	-/+	4
С самого начала (и до конца решения) рассматривался только один из двух возможных случаев.	-/.	2

Задание 3 (12 баллов)

Десятичная запись суммы $1 + 11 + 111 + \dots + 11\dots1$ оканчивается на 2023. Каким наименьшим может быть количество цифр в последнем слагаемом?

Решение:

Указанную сумму обозначим через S , а количество слагаемых в ней (совпадающее с количеством цифр в последнем слагаемом) - через n . Тогда сумма остатков слагаемых от деления на 10 000 равна $123 + 1111(n-3)$, и дает при делении на 10 000 такой же остаток, что и S .

Поэтому выполнено равенство $123 + 1111(n-3) = 10000m + 2023$, где m - некоторое натуральное число.

Отсюда

$$n - 3 = \frac{10\,000m + 2023 - 123}{1111} = 9m + \frac{m + 789}{1111} + 1$$

Наименьшее m , при котором $m + 789$ делится на 1111, равно $1111 - 789 = 322$.

Следовательно, искомое решение n равно $3 + 9 \cdot 322 + 1 + 1 = 2903$

Ответ: 2903

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Ход решений верный, но допущены ошибки в вычислениях	+/-	7-9
Верно составлено уравнение, но дальше продвижений нет	-/+	3
Задача сведена к рассмотрению остатков по модулю 10000, но дальше продвижений нет	-/.	1

Задание 4 (12 баллов)

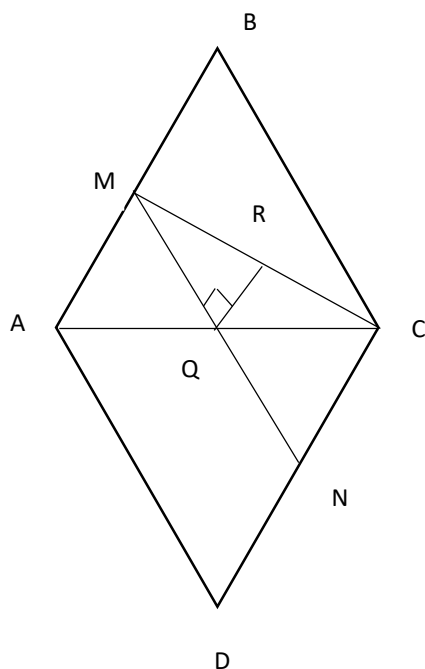
На поверхности правильного тетраэдра $ABCD$ построена замкнутая линия, каждая точка X которой обладает следующим свойством: длина кратчайшего пути по поверхности тетраэдра между X и серединой ребра AB равна длине кратчайшего пути по поверхности тетраэдра между X и серединой ребра CD . Найдите длину этой линии, если длина ребра тетраэдра равна 1.

Решение.

Пусть M и N середины ребер AB и CD соответственно. Из соображений симметрии ясно, что ребрами AC , BC , BD , AD и отрезками AN , BN , CM , DM линия, о которой идет речь в условии задачи разбивается на 8 равных. Поэтому достаточно рассмотреть точки, принадлежащие треугольнику AMC .

Пусть P - одна из таких точек. Тогда кратчайшим путем между P и M служит отрезок PM , а кратчайшим путем между P и N - двухзвенная ломаная PKN , вершина K которой принадлежит ребру AC (в случае $P \in AC$ имеем просто отрезок PN). На развертке тетраэдра объединение граней ABC и ADC представляет собой ромб $ABCD$, а ломаная PKN - отрезок PN в нем. Условие $PM = PN$ означает, что P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN ; следовательно геометрическим местом точек P служит отрезок QR , где Q -

середина ребра AC (и середина отрезка MN) R - точка на отрезке MC , $\angle MQR = 90^\circ$ (см рисунок).



Найдем длину отрезка QR . Легко видеть, что $\angle QMR = 30^\circ$,

а отрезок QM , будучи средней линией треугольника ABC , имеет длину $\frac{1}{2}$.

Поэтому $QR = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Умножив это число на 8, получим ответ к задаче: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Приведено правильное построение линии	+/-	8-10
Отмечено, что линия является 8-звенной ломаной	-/.	1

Задание 5 (12 баллов)

При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\log_x 3} + \frac{1}{\log_y 3} = 1, \\ y = 3 - ax. \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Область допустимых значений переменных задается условиями

$$x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1.$$

Из первого уравнения получаем

$$\log_3 x - \log_3 y = 1,$$

откуда

$$xy = 3.$$

Подставив $y = \frac{3}{x}$ во второе уравнение, получим

$$ax^2 - 3x + 3 = 0$$

Мы должны найти все такие a , при которых это уравнение не имеет положительных корней, отличных от 1 и 3.

Если $a = 0$, то $x = 1$ единственный корень. Но $x \neq 1$.

Если же $a \neq 0$ и дискриминант $D = 9 - 12a$ отрицателен, то действительных корней нет вообще.

Итак при $a \in \{0\} \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ исходная система решений не имеет.

При $a \leq \frac{3}{4}$ хотя бы один положительный корень у квадратного уравнения есть, поскольку сумма корней и их произведение имеют одинаковый знак.

Если же один из корней равен 3, то $a = \frac{2}{3}$ и уравнение $\frac{2}{3}x^2 - 3x + 3 = 0$ имеет также корень $x = \frac{3}{2}$ (а исходная система имеет решение $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$).

Ответ: при $a \in \{0\} \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Ход решения верный, но не доказано наличие решений исходной системы при $a \leq \frac{3}{4}$, $a \neq 0$	+/-	8
Пропущен случай $a = 0$	-/.	1

Задание 6 (14 баллов)

В неравностороннем треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 . Известно, что $AA_1 : BB_1 = AC : BC$ и что радиус окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CA и CB , равен 1. Найдите периметр треугольника ABC .

Решение: Докажем, что $\angle ABC = 60^\circ$. Для этого положим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ и воспользуемся теоремой синусов.

Имеем:

$$\frac{AA_1}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \angle AA_1C}, \quad \frac{BB_1}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \angle BB_1C},$$

откуда

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{\sin \angle BB_1C}{\sin \angle AA_1C},$$

С учетом условия $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$ это означает, что $\sin \angle BB_1C = \sin \angle AA_1C$

Равенству $\alpha = \beta$, противоречило бы условию задачи.

Поэтому $\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} + \beta = 180^\circ$, откуда $\alpha + \beta = 120^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$

Теперь найдем периметр треугольника ABC . Пусть окружность с центром O касается стороны AC в точке K , а продолжений сторон CA и CB – в точках S и T соответственно.

Тогда $AK = AS$, $BK = BT$

и

$$\begin{aligned} AB + CA + CB &= CA + AS + CB + BT = CS + CT = \\ &= OS \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + OT \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 2 \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Установлено равенство $\angle C = 60^\circ$, но периметр треугольника не найден	+/-	7
Равенство $\angle C = 60^\circ$ не доказано, но с его использованием найден периметр	-/+	2

Задание 7 (14 баллов)

Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 13} + \sqrt{2x^2 + 8x + 26}.$$

Решение.

Рассмотрим векторы

$$\vec{a} = (x + 3; 2 - x), \vec{b} = (1 - x; x + 5) \text{ и } \vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (4; 7)$$

$$\xrightarrow{a}(x+3; 2-x), \xrightarrow{b}(1-x; x+5) \text{ и } \xrightarrow{s} = \xrightarrow{a} + \xrightarrow{b} = (4; 7).$$

Так как

$$|\vec{a}| = \sqrt{2x^2 + 2x + 13}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2x^2 + 8x + 26},$$

то

$$f(x) = |\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{s}| = \sqrt{65}.$$

Равенство $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ выполняется, когда эти векторы сонаправлены; соответствующие значения x является корнем уравнения $\frac{x+3}{1-x} = \frac{2-x}{x+5}$ и равно $-\frac{13}{11}$.

Ответ: $\sqrt{65}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Установлено, что $f(x) \geq \sqrt{65}$, но не показано, что значение достигается	-/+	6

Задача 8 (16 баллов)

На плоскости отмечено 9 различных точек, среди которых есть красные, синие и зеленые. Точек других цветов нет. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 13, между красными и зелеными равна 11, а между синими и зелеными равна 1. Каким может быть количество красных отмеченных точек?

Решение.

Пусть отмечены красные точки $A_1, \dots, A_p$, синие точки $B_1, \dots, B_q$, и зеленые точки $C_1, \dots, C_r$.

Поскольку для каждой точки $(A_i B_j C_k)$ выполняется неравенство треугольника $A_i B_j \leq A_i C_k + B_j C_k$,

то

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r A_i B_j \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r (A_i C_k + B_j C_k)$$

Откуда

$$13r \leq 11q + p.$$

Аналогично, просуммировав неравенства $A_i C_k \leq A_i B_j + B_j C_k$, получим

$$11q \leq 13r + p.$$

Далее перебором можно установить, что найденным соотношениям и равенству $p + q + r = 9$ удовлетворяют ровно две тройки натуральных чисел

$$p = 5, q = 2, r = 2 \text{ и } p = 7, q = 1, r = 1.$$

Покажем, что оба найденных варианта могут быть реализованы на прямой. Каждую из отмеченных точек будем задавать ее координатой.

Первый вариант:

$$A_1 = \frac{3}{16}, A_2 = 1, A_3 = \frac{3}{2}, A_4 = 2, A_5 = \frac{17}{16} \quad B_1 = 0, B_2 = \frac{1}{8}, C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = \frac{3}{8}$$

Второй вариант:

$$A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{1}{3}, A_3 = \frac{1}{2}, A_4 = \frac{2}{3}, A_5 = \frac{5}{6}, A_6 = 5, A_7 = 7 \quad B_1 = 0, C_1 = 1$$

Ответ: 5 или 7

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	16
Установлено, что все числа, отличные от 5 и 7, не подходят. Примеров нет.	+/-	12
Если пример(ы) для 5 и/или 7 красных точек	-/+	по 3 за каждый вариант