ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «МИССИЯ ВЫПОЛНИМА. ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!» ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2022-2023 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

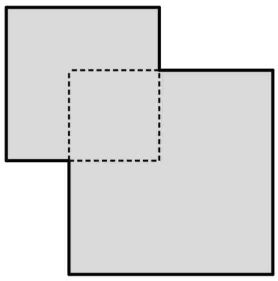
8-9 классы **Вариант 1**

Задание 1 (10 баллов)

Если сложить произведение и сумму двух чисел, то получится 95. Если вычесть из произведения этих чисел их сумму, то получится 59. Найдите эти числа.

Задание 2 (10 баллов)

Два квадрата, стороны которых относятся как 3:4, наложены друг на друга так, что их общая часть также образует квадрат. Длины сторон всех трех квадратов являются натуральными числами, а площадь закрашенной фигуры равна 525. Найдите стороны всех квадратов.



Задание 3 (12 баллов)

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого десятичная запись числа $n!$ оканчивается 500 нулями. ($n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$)

Задание 4 (12 баллов)

На доске написано:

$$* 1 * 8 * 64 * 8^3 * 8^4 * 8^5 * 8^6 * 8^7$$

Боря и Гоша по очереди заменяют звездочки знаками + или – (по одной звездочке за один ход). После восьми ходов вычисляется значение полученного выражения. Докажите, что Гоша может ходить так, что эта сумма будет делиться на 13, если он ходит вторым.

Задание 5 (12 баллов)

Найдите количество пар (m, n) натуральных чисел, таких что каждый из корней уравнения $x^2 - mx - n = 0$ не превосходит 10.

Задание 6 (14 баллов)

У Бори и Гоши есть шахматная доска размером 10×10 и по набору из одинакового числа плиток. У Бори все плитки имеют размеры 1×3, а у Гоши некоторые плитки размеров 1×3, а остальные – 1×4. Ребята выкладывают свои плитки так, чтобы они не выступали за края доски, чтобы края плиток проходили по линиям клеток и чтобы никакие две плитки не касались друг друга (даже углами). Боре удалось выложить все свои плитки указанным способом. Докажите, что, убрав плитки Бори, Гоша тоже сможет уложить свои плитки, не нарушив правила.

Задание 7 (14 баллов)

В школе любые два ребёнка либо дружат друг с другом, либо нет. Назовём ребёнка общительным, если он дружит хотя бы с тремя другими детьми. Известно, что в школе есть n общительных детей, а также ровно 11 детей, у которых всего один друг. При каком наименьшем n заведомо найдётся несколько детей, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый знал обоих своих соседей?

Задача 8 (16 баллов)

Найдите наименьшее натуральное число n такое, что существуют различные натуральные числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ такие, что

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\left(1-\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{118}{2023}.$$

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«МИССИЯ ВЫПОЛНИМА.
ТВОЕ ПРИЗВАНИЕ – ФИНАНСИСТ!»
ПО ПРЕДМЕТУ **МАТЕМАТИКА** 2022-2023 уч. года

ОЧНЫЙ ЭТАП

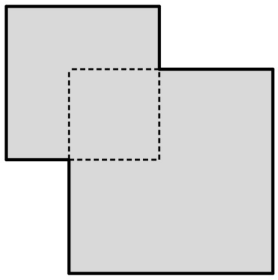
8-9 классы **Вариант 2**

Задание 1 (10 баллов)

Если сложить произведение и сумму двух чисел, то получится 83. Если вычесть из произведения этих чисел их сумму, то получится 47. Найдите эти числа.

Задание 2 (10 баллов)

Два квадрата, стороны которых относятся как 3:4, наложены друг на друга так, что их общая часть также образует квадрат. Длины сторон всех трех квадратов являются натуральными числами, а площадь закрашенной фигуры равна 800. Найдите стороны всех квадратов.



Задание 3 (12 баллов)

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого десятичная запись числа n! оканчивается 600 нулями. ($n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$)

Задание 4 (12 баллов)

На доске написано:

$$* \, 1 * 7 * 49 * 7^3 * 7^4 * 7^5 * 7^6 * 7^7$$

Боря и Гоша по очереди заменяют звездочки знаками + или – (по одной звездочке за один ход). После восьми ходов вычисляется значение полученного выражения. Докажите, что Гоша может ходить так, что эта сумма будет делиться на 10, если он ходит вторым.

Задание 5 (12 баллов)

Найдите количество пар (m, n) натуральных чисел, таких что каждый из корней уравнения $x^2 - mx - n = 0$ не превосходит 11.

Задание 6 (14 баллов)

У Бори и Гоши есть шахматная доска размером 10×10 и по набору из одинакового числа плиток. У Бори все плитки имеют размеры 1×3, а у Гоши некоторые плитки размеров 1×3, а остальные – 1×4. Ребята выкладывают свои плитки так, чтобы они не выступали за края доски, чтобы края плиток проходили по линиям клеток и чтобы никакие две плитки не касались друг друга (даже углами). Боре удалось выложить все свои плитки указанным способом. Докажите, что, убрав плитки Бори, Гоша тоже сможет уложить свои плитки, не нарушив правила.

Задание 7 (14 баллов)

В школе любые два ребёнка либо дружат друг с другом, либо нет. Назовём ребёнка общительным, если он дружит хотя бы с тремя другими детьми. Известно, что в школе есть n общительных детей, а также ровно 10 детей, у которых всего один друг. При каком наименьшем n заведомо найдётся несколько детей, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый знал обоих своих соседей?

Задача 8 (16 баллов)

Найдите наименьшее натуральное число n такое, что существуют различные натуральные числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ такие, что

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\left(1-\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{336}{2022}.$$