10 класс, Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 23 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей спереди на 25% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей сзади Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

Решение. Пусть перед Гришей находилось x человек, тогда сзади него — $x - 23$.
Из первого условия и неравенства $x \geq 23$ следует, что число x является двузначным. Посчитаем сумму цифр на талонах перед Гришей:
$x + x - 9 = 2x - 9$.
Также заметим, что сзади Гриши находятся ровно $99 - x$ двузначных чисел, а остальные — трёхзначные, потому что $x + x - 23 < 1000$.
Посчитаем сумму цифр на талонах сзади Гриши:
$2(99 - x) + 3(2x - 23 - 99) = 4x - 168$.
Используя третье условие, составляем уравнение:
$1,25 \cdot (4x - 168) = 2x - 9 \Rightarrow 3x = 201 \Rightarrow x = 67$. Таким образом, общее число людей равнялось $x + x - 23 = 111$.
Ответ: 111.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Получен верный ответ, но обоснование неполное (например, составлено верное уравнение, но не указано, на основе чего это сделано)	±	6-9
При верном ходе решения допущены арифметические ошибки, верный ответ не найден	∓	3-6
Имеется продвижение в решении задачи	∸	1-2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 2 (10 баллов)

Найдите все такие пары натуральных чисел $(a; b)$, для которых

4 НОК(a, b) + НОД(a, b) = $(a + b)^2 + 1$.

Решение. Пусть НОД$(a, b) = d$ и $a = d \cdot a_1$, $b = d \cdot b_1$, тогда НОД$(a_1, b_1) = 1$ и НОК$(a, b) = a_1 b_1 d$. Получаем уравнение

$4a_1b_1d + d = d^2(a_1 + b_1)^2 + 1.$

Заметим, что из этого равенства следует, что d – делитель 1, то есть d = 1, тогда равенство приобретает вид:

$4a_1b_1 = (a_1 + b_1)^2$, то есть $(a_1 - b_1)^2 = 0$, откуда $a_1 = b_1$.

Так как НОД$(a_1, b_1) = 1$, то $a_1 = b_1 = 1$.

Ответ: (1; 1).

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Получен верный ответ, но доказательство отсутствия пар, отличных от (1,1), не приведено или содержит существенные пробелы	±	3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 3 (12 баллов)

Дана квадратная таблица 50×50. В каждой её клетке стоит либо единица, либо ноль, причём сумма всех чисел в таблице равна 1250. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковая сумма чисел.

Решение. Предположим противное: пусть во всех строках суммы чисел различны и во всех столбцах тоже суммы различны.

Заметим, что найдётся строка суммой чисел 0, иначе общая сумма будет равна $1 + 2 + \ldots + 50 = 1275 \neq 1250$.

Также найдётся столбец с суммой 50, иначе общая сумма будет равна $0 + 1 + 2 + \ldots + 49 = 1225 \neq 1250$.

Таким образом, найдётся строка со всеми нулями, а столбец со всеми единицами — противоречие, ведь любая строка и любой столбец имеют пересечение.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Доказательство содержит пробелы (например, доказано, что имеется строка и/или столбец из нулей, но противоречие не найден)	±	6
Доказательство отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 4 (12 баллов)

В треугольнике ABC проведены биссектриса AA_1 и высота BB_1. Доказать, что если $\angle AA_1B = 45^\circ$, то окружность, описанная около треугольника A_1B_1C, касается прямой AA_1.

Решение. Посчитаем углы: пусть $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle ABB_1 = 90^\circ - \alpha$ и $\angle ABA_1 = 135^\circ - \alpha$.

Значит $\angle B_1BA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABB_1 = 45° + \alpha$.
Получается, что угол, смежный с $\angle ABA_1$ равен $\angle B_1BA_1 \Rightarrow BA_1$ – биссектриса внешнего угла ABB_1. Таким образом, точка A_1 – центр вневписанной окружности $\triangle BAB_1$, касающейся стороны BB_1. Значит B_1A_1 – биссектриса $\angle BB_1C$, то есть $\angle CB_1A_1 = 45°$. Но и угол, вертикальный с $\angle AA_1B$ равен $45°$. Тогда по теореме об угле между касательной и хордой окружность (A_1B_1C) касается AA_1, что и требовалось.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Доказательство содержит пробелы	±	6
Доказательство отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 5 (12 баллов)

Функция, принимающая только неотрицательные значения, удовлетворяет равенству: $f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$, при этом $f(1) + f(4) = 9$. Найдите $f(2^{2023})$.

Решение. $f\ (2) = f(1+1) = \sqrt{2}f(1)$,
$f\ (4) = f(2+2) = \sqrt{2}f\ (2) = 2f\ (1)$.
Таким образом
$f\ (1)\ + f\ (4) = f\ (1) + 2f\ (1) = 3f\ (1) = 9$, откуда $f\ (1) = 3$.

Из условия задачи $f\ (2n)\ =\ f\ (n+n)\ = \sqrt{2}f(n)$.

То есть

$$f\ (2^{2023}) = \sqrt{2f}(2^{2022}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 f\ (2^{2021}) = \ \dots\ = \left(\sqrt{2}\right)^{2023} f\ (1) =$$
$$= \ (\sqrt{2})^{\ 2023} \cdot 3.$$

Ответ: $(\sqrt{2})^{\ 2023} \cdot 3$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	12
Найдено значение $f(1)$, получено соотношение $f\ (2n) = \sqrt{2}f(n)$, но при вычислении ответа допущены ошибки	±	8
Найдено значение $f(1)$ или получено соотношение $f\ (2n) = \sqrt{2}f(n)$, но ответ не найден	∓	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 6 (14 баллов)

Найдите a, b, c, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3, \\ (3a + 3b)^2 = c^3, \\ a^2 - ab + b^2 = c^2. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену $c = -d$ и преобразуем первое уравнение системы:

$a + b^3 + d^3 - 3abd = 0$;

$(a + b + d)(a^2 + b^2 + d^2 - ab - ad - bd) = 0$;
Либо $a + b + d = 0$, либо $a^2 + b^2 + d^2 - ab - ad - bd = 0$.
Случай 1. $a + b + d = 0$ то есть $a + b = c$.
Подставим в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} a + b = c, \\ (3a + 3b)^2 = c^3, \\ a^2 - ab + b^2 = c^2. \end{cases}$$

Подставим из первого уравнения c во второе: $9c^2 = c^3$, то есть либо $c = 0$, либо $c = 9$.

Если $a + b = 0$, то $3a^2 = 0$, то есть $a = b = 0$ и получаем решение $(0;\ 0;\ 0)$.

Если $a + b = 9$, то $a^2 - a(9 - a) + (9 - a)^2 = 81$, то есть $3a^2 - 27a = 0$, откуда $a = 0$ или $a = 9$ и получаем решения $(9; 0; 9)$ и $(0; 9; 9)$.

Случай 2. $a^2 + b^2 + d^2 - ab - ad - bd = 0$.
$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab + 2ac + 2bc = 0$
$(a - b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2 = 0$, откуда $a = b = -c$. Подставим в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} a = b = -c, \\ (3a + 3b)^2 = c^3, \\ a^2 - ab + b^2 = c^2. \end{cases}$$

Получаем, что $36c^2 = c^3$, откуда либо $c = 0$ и получаем решение $(0;\ 0;\ 0)$, либо $c = 36$ и получаем решение $(-36; -36; 36)$.
Ответ: $(0; 0; 0)$, $(9; 0; 9)$, $(0; 9; 9)$, $(-36; -36; 36)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	14
Ход решения верный, но одно из решений потеряно	±	8
Найдено лишь одно из возможных решений	∓	2

Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 7 (14 баллов)

Дано 10 различных натуральных чисел. На доску выписали все эти числа и все возможные произведения, составленные из этих чисел (все произведения 2 чисел, все произведения 3 чисел, ..., произведение 10 чисел). Какое наименьшее количество различных значений могло оказаться на доске?

Решение. Пример: числа $2^0, 2^1, \ldots, 2^9$. Тогда произведениями будут все степени двойки от нулевой до 45-ой.

Оценка: упорядочим выписанные числа: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Тогда построим цепочку неравенств:

$a_1 < a_2 < \ldots < a_{10} < a_{10}a_2 < \ldots < a_{10}a_9 < a_{10}a_9a_2 < \ldots < a_{10}a_9a_8 < \ldots < a_{10} \ldots a_2$.

Неравенства выполнены в силу порядка и условия $a_2 > 1$. Таким образом, мы нашли уже $10 + 8 + 7 + \ldots + 1 = 46$ различных значений, что и требовалось доказать.

Ответ: 46.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	14
Ответ найден, приведен пример (степени 2), соответствующий числу 46, но не доказано, что число 46 является наименьшим, удовлетворяющим условиям задачи	±	6
Имеется продвижение в решении задачи	∓	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задача 8 (16 баллов)

Заяц и Волк играют в игру на клетчатой доске 10×10. Сначала Волк ставит фишку на одну из клеток. Далее, начиная с Зайца, игроки по очереди передвигают фишку. Заяц всегда передвигает фишку на 1 клетку по диагонали, а Волк на одну клетку по горизонтали или вертикали, причём нельзя ставить фишку на клетку, на которой фишка уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Выигрывает Заяц, приведем одну из возможных стратегий. Разделим все клетки доски на пары таким образом, чтобы в любой паре

клетки находились на расстоянии 1 по диагонали. Например, можно разбить всю доску на квадраты 2×2 и внутри каждого квадрата разбить клетки на 2 пары по диагонали. После того как Волк будет ставить фишку в клетку, всегда будем передвигать фишку в другую клетку этой же пары. При такой стратегии Заяц всегда будет иметь ход, а, значит, не сможет проиграть. Игра является конечной, поэтому проиграет Волк.
Ответ: Заяц.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Указана и обоснована выигрышная стратегия для Зайца	+	16
Приведен пример верной стратегии при том, что фиксирован конкретный ход Волка	±	8
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

10 класс, Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 31 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей сзади на 20% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей спереди Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

Решение. Пусть перед Гришей находилось x человек, тогда сзади него — $x - 31$. Из первого условия и неравенства $x \geq 31$ следует, что число x является двузначным. Посчитаем сумму цифр на талонах перед Гришей:
$x + x - 9 = 2x - 9$. Также заметим, что сзади Гриши находятся ровно $99 - x$ двузначных чисел, а остальные — трёхзначные, потому что
$x + x - 31 < 1000$.
Посчитаем сумму цифр на талонах сзади Гриши:
$2(99 - x) + 3(2x - 31 - 99) = 4x - 192$.
Используя третье условие, составляем уравнение:
$4x - 192 = 1.2 \cdot (2x - 9) \Rightarrow 1.6x = 181.2 \Rightarrow x = 113.25$.
Полученное противоречие показывает, что решений, удовлетворяющих условиям задачи, нет.

Содержание критерия	Оценка	Баллы

Задача решена полностью, получен и обоснован вывод об отсутствии решений	+	10
Составлены и решены уравнения, получено значение $x = 113.25$ и дробный ответ	+.	8
Сделан вывод об отсутствии решений, но обоснование содержит пробелы	±	6
Имеются продвижения в решении (найдено количество цифр на талонах у людей, стоящих впереди или позади Гриши и т.п.)	∓	1-3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 2 (10 баллов)

Найдите все такие пары натуральных чисел (a; b), для которых

НОК(a, b)+4 НОД(a, b) = $(a + b)^2$ +1.

Решение.

Пусть НОД$(a, b) = d$ и $a = d \cdot a_1,\ b = d \cdot b_1$, тогда НОД$(a_1, b_1) = 1$.

$a_1 b_1 d + 4d = d^2(a_1 + b_1)^2 + 1$.

Заметим, что из этого равенства следует, что d – делитель 1, то есть $d = 1$, тогда равенство приобретает вид $a_1 b_1 + 3 = (a_1 + b_1)^2$, то есть

$a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2 = 3$, откуда $a_1 = b_1 = 1$ (во всех остальных случаях левая часть строго больше 3).

Ответ: (1; 1).

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Получен верный ответ, но доказательство отсутствия пар, отличных от (1,1), не приведено или содержит существенные пробелы	±	3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 3 (12 баллов)

Дана квадратная таблица 70×70. В каждой её клетке стоит либо единица, либо ноль, причём сумма всех чисел в таблице равна 2450. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковая сумма чисел.

Решение. Предположим противное: пусть во всех строках суммы чисел различны и во всех столбцах тоже суммы различны. Заметим, что найдётся строка суммой чисел 0, иначе общая сумма будет равна $1 + 2 + \ldots 70 = 2485 \neq 2450$. Также найдётся столбец с суммой 70, иначе общая сумма будет равна $0 + 1 + 2 + \ldots + 69 = 2415 \neq 2450$. Таким образом, найдётся строка со всеми нулями, а столбец со всеми единицами — противоречие, ведь любая строка и любой столбец имеют пересечение.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Доказательство содержит пробелы (например, доказано, что имеется строка и/или столбец из нулей, но противоречие не найден)	±	6
Доказательство отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 4 (12 баллов)

В треугольнике ABC биссектриса AA_1 и высота BB_1 пересекаются в точке O. Оказалось, что $\angle AA_1B=45^\circ$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_1OB_1, касается одной из сторон $\triangle ABC$.

Решение. Посчитаем углы: пусть $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle ABB_1 = 90° - \alpha$ и $\angle ABA_1 = 135° - \alpha$. Значит $\angle B_1BA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABB_1 = 45° + \alpha$. Получается, что угол, смежный с $\angle ABA_1$ равен $\angle B_1BA_1 \Rightarrow BA_1$ – биссектриса внешнего угла ABB_1. Таким образом, точка A_1 – центр вневписанной окружности $\triangle BAB_1$, касающейся стороны BB_1. Значит B_1A_1 – биссектриса $\angle BB_1C$, то есть $\angle A_1B_1B = 45°$. Но и $\angle AA_1B = 45°$. Тогда по теореме об угле между касательной и хордой окружность (A_1OB_1) касается стороны BC, что и требовалось.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Доказательство содержит пробелы	±	6
Доказательство отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 5 (12 баллов)

Функция, принимающая только неотрицательные значения, удовлетворяет равенству: $f(x+y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$, при этом $f(1) + f(4) =12$. Найдите $f(2^{2024})$.

Решение. $f\ (2) = f(1+1) = \sqrt{2}f(1)$,
$f\ (4) = f(2+2) = \sqrt{2}f\ (2) = 2f\ (1)$.
Таким образом
$f\ (1)\ + f\ (4) = f\ (1) + 2f\ (1) = 3f\ (1) = 12$, откуда $f\ (1) = 4$.

Из условия задачи $f\ (2n)\ =\ f\ (n+n)\ = \sqrt{2}f(n)$.

То есть

$$f\left(2^{2023}\right)=\sqrt{2}f\left(2^{2022}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^{2}f\left(2^{2021}\right)=\ \dots\ =\left(\sqrt{2}\right)^{2024}f(1)=$$
$$=\left(\sqrt{2}\right)^{2024}\cdot 4=2^{1014}.$$

Ответ: 2^{1014}.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	12
Найдено значение $f(1)$, получено соотношение $f(2n)=\sqrt{2}f(n)$, но при вычислении ответа допущены ошибки	±	8
Найдено значение $f(1)$ или получено соотношение $f(2n)=\sqrt{2}f(n)$, но ответ не найден	∓	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 6 (14 баллов)

Найдите a, b, c, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a^3+b^3+3abc=c^3, \\ (2a+2b)^2=c^3, \\ a^2-ab+b^2=c^2. \end{cases}$$

Решение.

Сделаем замену $c=-d$ и преобразуем первое уравнение системы:
$a^3+b^3+d^3-3abd=0$;
$(a+b+d)(a^2+b^2+d^2-ab-ad-bd)=0$;
Либо $a+b+d=0$, либо $a^2+b^2+d^2-ab-ad-bd=0$.
Случай 1. $a+b+d=0$, то есть $a+b=c$.
Подставим в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} a+b=c, \\ (2a+2b)^2=c^3 \\ a^2-ab+b^2=c^2 \end{cases}$$

Подставим из первого уравнения c во второе: $4c^2=c^3$, то есть либо $c=0$, либо $c=4$. Если $a+b=0$, то $3a^2=0$, то есть $a=b=0$ и получаем решение $(0;0;0)$.

Если $a+b=4$, то $a^2-a(4-a)+(4-a)^2=16$, то есть $3a^2-12a=0$, откуда $a=0$ или $a=4$ и получаем решения $(4;0;4)$ и $(0;4;4)$.
Случай 2. $a^2+b^2+d^2-ab-ad-bd=0$.
$2a^2+2b^2+2c^2-2ab+2ac+2bc=0$
$(a-b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2=0$, откуда $a=b=-c$.
Подставим в оставшиеся уравнения:

$$\begin{cases} a = b = -c \\ (2a + 2b)^2 = c^3 \\ a^2 - ab + b^2 = c^2 \end{cases}$$

Получаем, что $16c^2 = c^3$, откуда
либо $c = 0$ и получаем решение $(0; 0; 0)$,
либо $c = 16$ и получаем решение $(-16; -16; 16)$.
Ответ: $(0; 0; 0)$, $(4; 0; 4)$, $(0; 4; 4)$, $(-16; -16; 16)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	14
Ход решения верный, но одно из решений потеряно	±	8
Найдено лишь одно из возможных решений	∓	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 7 (14 баллов)

Дано 11 различных натуральных чисел. На доску выписали все эти числа и все возможные произведения, составленные из этих чисел (все произведения 2 чисел, все произведения 3 чисел, ..., произведение 11 чисел). Какое наименьшее количество различных значений могло оказаться на доске?

Решение. Пример: числа $2^0, 2^1, \ldots, 2^{10}$. Тогда произведениями будут все степени двойки от нулевой до 55-ой.

Оценка: упорядочим выписанные числа: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$. Тогда построим цепочку неравенств:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{11} < a_{11}a_2 < \ldots < a_{11}a_{10} < a_{11}a_{10}a_2 < \ldots < a_{11}a_{10}a_9 < \ldots < a_{11} \ldots a_2.$$

Неравенства выполнены в силу порядка и условия $a_2 > 1$. Таким образом, мы нашли уже $11 + 9 + 8 + \ldots + 1 = 56$ различных значений, что и требовалось доказать.

Ответ: 56.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен верный ответ	+	14
Ответ найден, приведен пример (степени 2), соответствующий числу 56, но не доказано, что число 56 является наименьшим, удовлетворяющим условиям задачи	±	6

Имеется продвижение в решении задачи	∓	2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задача 8 (16 баллов)

Заяц и Волк играют в игру на клетчатой доске 12×12. Сначала Волк ставит фишку на одну из клеток. Далее, начиная с Зайца, игроки по очереди передвигают фишку. Заяц всегда передвигает фишку на 1 клетку по диагонали, а Волк на одну клетку по горизонтали или вертикали, причём нельзя ставить фишку на клетку, на которой фишка уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Выигрывает Заяц, приведем одну из возможных стратегий. Разделим все клетки доски на пары таким образом, чтобы в любой паре клетки находились на расстоянии 1 по диагонали. Например, можно разбить всю доску на квадраты 2×2 и внутри каждого квадрата разбить клетки на 2 пары по диагонали. После того как Волк будет ставить фишку в клетку, всегда будем передвигать фишку в другую клетку этой же пары. При такой стратегии Заяц всегда будет иметь ход, а значит не сможет проиграть. Игра является конечной, поэтому проиграет Волк.
Ответ: Заяц.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Указана и обоснована выигрышная стратегия для Зайца	+	16
Приведен пример верной стратегии при том, что фиксирован конкретный ход Волка	±	8
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0