11 класс. 1 Вариант

Задание 1. В некотором ВУЗе существуют очная и дистанционная формы обучения. При этом среди студентов, занимающихся очно, 50% занимаются также и дистанционно, а среди студентов, занимающихся дистанционно, 60% занимаются также и очно. Какую часть составляют студенты, занимающиеся только очно?

Решение. Пусть m – число студентов, занимающихся только очно. Из условия легко вывести, что сочетают обе формы обучения также m студентов, причем $m = 0{,}6(m+n)$, где n – число студентов, занимающихся только дистанционно. Отсюда $n = \frac{2}{3}m$, общее число студентов равно $m + m + n = \frac{8}{3}m$, а искомая величина равна $\frac{3}{8}$, то есть 37,5% от общего числа студентов

Ответ: 37,5.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
План решения верный, но в ходе его выполнения допущены арифметические или алгебраические ошибки	∓	2

Задание 2. Каково наименьшее значение выражения $A + B$, если A и B – числа, удовлетворяющие системе неравенств $A + 5B \geq 9$, $3A + 4B \geq 11$, $5A + 3B \geq 11$?

Решение. Сложив удвоенное второе неравенство с третьим, получим $11A + 11B \geq 33$. Отсюда $A + B \geq 3$. С другой стороны, при $A = B = \frac{3}{2}$ все три неравенства из условия задачи выполняются.

Ответ: 3.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Доказано только, что $A + B \geq 3$	±	6
При верном ходе решения допущены арифметические ошибки	∓	2

Задание 3. Для каждого натурального числа n положим $p(n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}}$. Вычислите сумму $p(1) + p(2) + \ldots + p(99)$.

Решение. Так как

$$p(n) + p(100-n) = \frac{9^n}{9^n + 9^{50}} + \frac{9^{100-n}}{9^{100-n} + 9^{50}} = \frac{9^n(9^{100-n} + 9^{50}) + 9^{100-n}(9^n + 9^{50})}{(9^n + 9^{50})(9^{100-n} + 9^{50})} = \frac{9^{100} + 9^{n+50} + 9^{100} + 9^{150-n}}{9^{100} + 9^{150-n} + 9^{n+50} + 9^{100}} = 1$$

для любого n, то искомая сумма равна $49 + p(50) = 49{,}5$.

Ответ: 49,5.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12

Задание 4. Длина ребра куба $ABCDA'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку C и касающейся прямых AD, AA' и $A'B'$.

Решение. Введем систему координат с центром в точке A так, чтобы положительные полуоси $x, y,$ и z совпадали с лучами AB, AD и AA'сооотвественно. Пусть сфера с центром $O(x; y; z)$ и радиусом OC касается прямых AD, AA' и $A'B'$.

Тогда $OC^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + z^2 = x^2 + y^2 = y^2 + (z-1)^2$, причем три последних равенства образуют систему уравнений, имеющую ровно три решения в действительных числах $(x; y; z) - (1; 0; 0)$, $(1; 2; 2)$ и $(5; 4; -4)$. Таким образом, условиям задачи удовлетворяет три сферы, их радиусы, вычисленные, например, как $\sqrt{x^2 + y^2}$, равны 1, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{41}$.

Ответ: 1, $\sqrt{5}$, $\sqrt{41}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Найдены только две из сфер, удовлетворяющих условиям	±	9
Правильно составлена система уравнений, но в итоге найдено только одно из возможных значений радиуса	∓	4
Указана сфера с центром $(1; 0; 0)$, других продвижений нет	∸	1

Задание 5. Решите уравнение $arcctg\,\frac{5x+3}{3x-5} + arcctg\,\frac{x-1}{x+1} = x$.

Решение. ОДЗ неизвестного задается условиями $3x - 5 \neq 0$ и $x + 1 \neq 0$.

При помощи формулы $ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\, ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$ преобразуем левую часть уравнения. Пусть $arcctg\,\frac{5x+3}{3x-5} = \alpha$, $arcctg\,\frac{x-1}{x+1} = \beta$.

Тогда $ctg\alpha + ctg\beta = \frac{5x+3}{3x-5} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{8(x^2+1)}{(3x-5)(x+1)} \neq 0$ и $ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\frac{(5x+3)(x-1)}{(3x-5)(x+1)} - 1}{\frac{8(x^2+1)}{(3x-5)(x+1)}} = \frac{1}{4}$ при всех допустимых значениях x. Таким образом, $ctgx = ctg(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}$, причем $0 < x < 2\pi$, поскольку $0 < \alpha, \beta < \pi$. Получаем корни $x_1 = arcctg\frac{1}{4} = arctg4$ и $x_2 = x_1 + \pi$, оба они входят в ОДЗ.

Ответ: $arctg4$ и $\pi + arctg4$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Отсутствует указание на корректность применения формулы и (или) указание на вхождение корней в ОДЗ, остальное верно	+.	11
Найден только один корень (посторонних корней нет)	±	7
Оба корня найдены, но вместе с 1 или 2 посторонними	∓	4
Корни найдены, но вместе с бесконечным множеством посторонних	∸	2

Задание 6. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику $ABCDEF$, в котором

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 115°$, $\angle E = 120°$, $\angle F = 140°$. Найдите углы этих треугольников.

Решение. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ является пересечением треугольников KLM и PQR. Разберем два случая.

1. Любые две соседние стороны шестиугольника $ABCDEF$ принадлежат границам разных треугольников (рис.1).

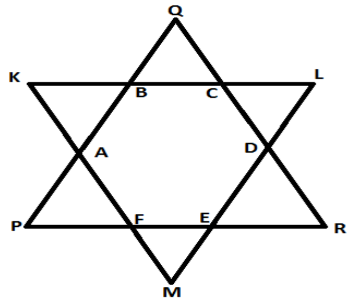

Рис.1.

Тогда $\angle K = 180° - (180° - \angle A) - (180° - \angle B) = 50°$,
$\angle L = 180° - (180° - \angle C) - (180° - \angle D) = 50°$,
$\angle M = 180° - (180° - \angle E) - (180° - \angle F) = 80°$,
$\angle P = 180° - (180° - \angle F) - (180° - \angle A) = 75°$,
$\angle Q = 180° - (180° - \angle B) - (180° - \angle C) = 50°$,
$\angle R = 180° - (180° - \angle D) - (180° - \angle E) = 55°$.

2. Не любые две соседние стороны шестиугольника принадлежат границам разных треугольников.

Заметим, что, поскольку сумма любых двух соседних углов шестиугольника $ABCDEF$ больше 180°, то никакие три его последовательные стороны не могут принадлежать границе одного треугольника. Поэтому имеет место конфигурация, показанная на рис. 2.

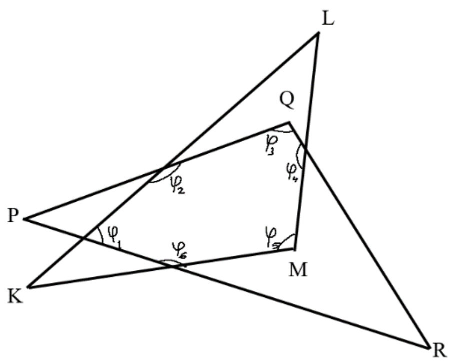

Рис.2.

Здесь мы должны установить, какой из углов шестиугольника $ABCDEF$ следует принимать за φ_1.
Этот угол характеризуется неравенствами
$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < 360°$ и $\varphi_1 + \varphi_6 + \varphi_5 < 360°$.
Перебор показывает, что $\varphi_1 = \angle C$.

Полагая вершины $A, B, \dots F$ перечисленными по часовой стрелке, получим
$\angle K = 180° - (180° - \angle B) - (180° - \angle C) = 50°$,
$\angle L = 180° - \angle K - \varphi_5 = 15°$,
$\angle M = \varphi_5 = 115°$,
$\angle P = 180° - (180° - \angle C) - (180° - \angle D) = 50°$,
$\angle Q = \varphi_3 = 120°$,
$\angle R = 180° - \angle P - \angle Q = 10°$.

Ответ: 50°, 50°, 80° и 50°, 55°, 75° или 15°, 50°, 115° и 10°, 50°, 120°

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Найдены обе пары треугольников, но нет четкого объяснения, почему не существует других пар	**+.**	12
Указаны обе возможные конфигурации, но допущены ошибки при вычислении углов	**+/2**	7
Найдена только одна пара и в ответе нет правильных пар	∓	3

Задание 7. При каких значениях параметра a существует прямая, касающаяся графика функции $f(x) = ax^4 + x^2 + x$ в двух точках? Для каждого такого значения найдите уравнение соответствующей прямой.

Решение. Пусть $P(p; f(p))$ и $Q(q;\ f(q))$, где $p < q$, - точки касания некоторой прямой с графиком функции $y = f(x)$. Тогда $k = f'(p) = f'(q) = \frac{f(p)-f(q)}{p-q}$, где k – угловой коэффициент этой прямой.

Так как $f'(x) = 4ax^3 + 2x + 1$, то из равенства $f'(p) = f'(q)$ и неравенств

$p < q$ и $p^3 < q^3$ получаем, что $a < 0$.

Выписав, далее, равенство $f'(p) + f'(q) = \frac{2(f(p)-f(q))}{p-q}$, преобразуем его к виду

$2(p^3 + q^3) = (p + q)(p^2 + q^2)$.

Отсюда $(p + q)(p - q)^2 = 0$ и, поскольку $p \neq q$, то $p + q = 0$.

Вновь воспользовавшись равенством $f'(p) = f'(q)$, найдем $p = -\sqrt{\frac{-1}{2a}}$, $q = \sqrt{\frac{-1}{2a}}$,

$f(p) = -\frac{1}{4a} - \sqrt{\frac{-1}{2a}}$, $f(q) = \frac{-1}{4a} + \sqrt{\frac{-1}{2a}}$.

Прямая PQ, следовательно, имеет уравнение $y = x - \frac{1}{4a}$.

Ответ: при $a < 0$; $y = x - \frac{1}{4a}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Ход решения верный, но в конце его допущены ошибки	∓	5
Установлено только, что $a < 0$	∸	3

Задание 8. Про последовательность $X = (x_1, \dots, x_{100})$ известно, что она состоит из всех натуральных чисел от 1 до 100, переставленных в некотором порядке. Мы должны узнать этот порядок. За один шаг можно выписать любую, также состоящую из чисел от 1 до 100, последовательность $(y_1, \dots, y_{100})$, про каждый член $y_i (i = 1, \dots, 100)$ которой нам сообщат, какое из соотношений $y_i > x_i$, $y_i < x_i$ или $y_i = x_i$ имеет место. За какое наименьшее число шагов можно наверняка определить X?

Решение. Последовательность X можно найти, выписав, например, такие 50 последовательностей:

1, 2, 3, …, 100;
3, 4, 5, …, 100, 1, 2;
5, 6, 7, …, 100, 1, 2, 3, 4;
………………………..
99, 100, 1, …, 96, 97, 98.

В k- й (k=2, …, 50) последовательности сначала идут числа от 2k-1 до 100, затем – числа от 1 до 2k-2.

Меньшего, чем 50, числа шагов для гарантированного определения X недостаточно. В самом деле, если выписано не более 49 последовательностей, то найдутся номера p и q

такие, что ни число 1, ни число 2, не сравнивались ни с x_p, ни с x_q. А тогда возможны как равенства $x_p = 1$, $x_q = 2$, так и равенства $x_p = 2$, $x_q = 1$
Ответ: за 50 шагов.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	16
Только приведён пример нужных 50 последовательностей	∓	6
Доказано только, что требуется не менее 50 последовательностей	∓	6

11 класс. 2 Вариант

Задание 1.

Среди людей, не говорящих по-английски, 4% говорят по-французски, а среди людей, не говорящих по-французски, 20% говорят по-английски. Во сколько раз число людей, не говорящих по-французски больше числа людей, не говорящих по-английски?

Решение. Пусть x и y – число людей, не говорящих по-английски и по-французски соответственно, z – число людей, не говорящих ни на одном из этих двух языков.

Тогда $z = (1 - 0{,}04)\,x = (1 - 0{,}2)y$, откуда $y = 1{,}2x$.

Ответ: в 1,2 раза.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
План решения верный, но в ходе его выполнения допущены арифметические или алгебраические ошибки	∓	2

Задание 2.

Каково наименьшее значение выражения $A + B$, если A и B – числа, удовлетворяющие системе неравенств $3A + 5B \leq 11$, $4A + 3B \leq 10$, $7A + 4B \leq 18$?

Решение. Сложив первое неравенство с удвоенным вторым, получим $11(A + B) \leq 31$. Отсюда $A + B \leq \frac{31}{11}$. С другой стороны, при $A = \frac{17}{11}, B = \frac{14}{11}$ все три неравенства из условия задачи выполняются.

Ответ: $\frac{31}{11}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Доказано только, что $A + B \geq \frac{31}{11}$	±	6
При верном ходе решения допущены арифметические ошибки	∓	2

Задание 3.

Для каждого натурального числа n положим $\mathrm{p(n)} = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}$. Вычислите сумму $q(1) + q(2)+\ldots+q(33)$.

Решение. Так как

$q(n)+p(34-n)=\frac{(-3)^n}{3^n+3^{17}}+\frac{(-3)^{34-n}}{3^{34-n}+3^{17}}=\frac{(-1)^n(3^{34}+3^{n+17}+3^{34}+3^{51-n})}{3^{34}+3^{51-n}+3^{n+17}+3^{34}}=(-1)^n$ для любого n, то $q(1)+q(2)+\ldots+q(33)=\big(q(1)+q(33)\big)+(q(2)+\big(q(32)\big)+\ldots+\big(q(16)+q(18)\big)+$ $+q(17)=\ -1+1-\ldots+1+q(17)=q(17)=-\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12

Задание 4.

Длина ребра куба $ABCDA'B'C'D'$ равна 1. Найдите радиус сферы, проходящей через точку B и касающейся прямых AD, AA'и $A'B'$.

Решение. Введем систему координат с центром в точке A так, чтобы положительные полуоси $x, y,$ и z совпадали с лучами AB, AD и AA'сооотвественно. Пусть сфера с центром $O(x;y;z)$ и радиусом OB касается прямых AD, AA'и $A'B'$.

Тогда $OB^2=(x-1)^2+y^2+z^2=x^2+z^2=x^2+y^2=y^2+(z-1)^2$. Три последних равенства образуют систему уравнений, которой удовлетворяет ровно четыре тройки действительных числах $(x;y;z)-(2+\sqrt{2};-1-\sqrt{2};-1-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2})$, $(2-\sqrt{2};-1+\sqrt{2};\ -1+\sqrt{2})$ и $(2-\sqrt{2};1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2})$. Среди соответствующих четырех сфер две имеют радиус $\sqrt{9+6\sqrt{2}}$, две – радиус $\sqrt{9-6\sqrt{2}}$.

Ответ: $\sqrt{9\pm6\sqrt{2}}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Найдены только три из сфер, удовлетворяющих условиям	+.	10
Правильно составлена система уравнений, но в итоге найдена только одно из возможных значений радиуса	∓	5
Правильно составлена система уравнений, но ни одно из возможных значений радиуса не найдено	∸	2

Задание 5.

Решите уравнение $arctg\,\frac{2x-1}{x+2}+arctg\,\frac{x+3}{3x-1}=x$.

Решение. ОДЗ неизвестного задается условиями $x+2\neq0$ и $3x-1\neq0$. При помощи формулы $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+\,tg\beta}{1-tg\alpha\,tg\beta}$ преобразуем левую часть уравнения. Пусть $arctg\,\frac{2x-1}{x+2}=\alpha$, $arctg\,\frac{x+1}{3x-1}=\beta$.

Тогда $1-tg\alpha\,tg\beta=1-\frac{(2x-1)(x+3)}{(x+2)(3x-1)}=\frac{x^2+1}{(x+2)(3x-1)}\neq0$ и

$tg(\alpha+\beta)=\frac{\frac{2x-1}{x+2}+\frac{x+3}{3x-1}}{\frac{x^2+1}{(x+2)(3x-1)}}=\frac{(2x-1)(3x-1)+(x+3)(x+2)}{x^2+1}=7$ при всех допустимых значениях x.

Таким образом, $tgx = 7$, причем $-\pi < x < \pi$, поскольку $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. Получаем корни $x_1 = arctg7$ и $x_2 = x_1 - \pi$; оба они входят в ОДЗ.

Ответ: $arctg7$ и $arctg7 - \pi$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Отсутствует указание на корректность применения формулы и (или) указание на вхождение корней в ОДЗ; остальное верно.	+.	11
Найден только один корень (посторонних корней нет)	±	7
Оба корня найдены, но вместе с 1 или 2 посторонним	∓	4
Корни найдены, но вместе с бесконечным множеством посторонних	−.	2

Задание 6.

Два треугольника пересекаются по шестиугольнику $ABCDEF$, в котором

$\angle A = \angle B = \angle C = 100°$, $\angle D = 130°$, $\angle E = 140°$, $\angle F = 150°$. Найдите углы этих треугольников.

Решение. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ является пересечением треугольников KLM и PQR. Разберем два случая.

1. Любые две соседние стороны шестиугольника $ABCDEF$ принадлежат границам разных треугольников (рис.1).

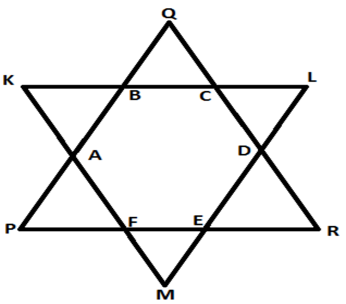

Рис.1.

Тогда $\angle K = 180° - (180° - \angle A) - (180° - \angle B) = 20°$,
$\angle L = 180° - (180° - \angle C) - (180° - \angle D) = 50°$,
$\angle M = 180° - (180° - \angle E) - (180° - \angle F) = 110°$,
$\angle P = 180° - (180° - \angle F) - (180° - \angle A) = 70°$,
$\angle Q = 180° - (180° - \angle B) - (180° - \angle C) = 20°$,
$\angle R = 180° - (180° - \angle D) - (180° - \angle E) = 90°$.

2. Не любые две соседние стороны шестиугольника принадлежат границам разных треугольников.

Заметим, что, поскольку сумма любых двух соседних углов шестиугольника $ABCDEF$ больше 180°, то никакие три его последовательные стороны не могут принадлежать границе одного треугольника. Поэтому имеет место конфигурация, показанная на рис. 2.

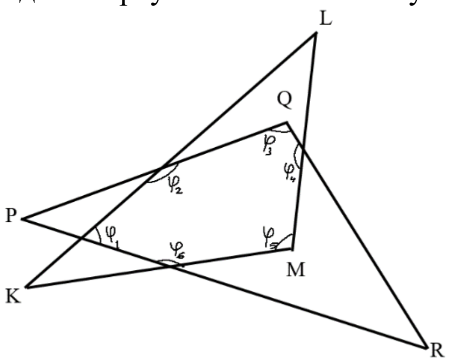

Рис.2.

Здесь мы должны установить, какой из углов шестиугольника $ABCDEF$ следует принимать за φ_1. Этот угол характеризуется неравенствами
$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < 360°$ и $\varphi_1 + \varphi_6 + \varphi_5 < 360°$.
Перебор показывает, что $\varphi_1 = \angle B$.

Полагая вершины $A, B, \dots F$ перечисленными по часовой стрелке, получим
$\angle K = 180° - (180° - \angle A) - (180° - \angle B) = 20°$,
$\angle M = \varphi_5 = \angle F = 150°$,
$\angle L = 180 - \angle K - \angle M = 10°$,
$\angle P = 180° - (180° - \angle B) - (180° - \angle C) = 20°$,
$\angle Q = \varphi_3 = \angle D = 130°$,
$\angle R = 180° - \angle P - \angle Q = 30°$.
Ответ: 20°, 50°, 110° и 20°, 70°, 90° или 10°, 20°, 150° и 20°, 30°, 130°.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Найдены обе пары треугольников, но нет четкого объяснения, почему не существует других пар	**+.**	12
Указаны обе возможные конфигурации, но допущены ошибки при вычислении углов	**+/2**	7
Найдена только одна пара и в ответе нет правильных пар	∓	3

Задание 7.

При каких значениях параметра b существует прямая, касающаяся графика функции $f(x) = x^4 + bx^2 + x$ в двух точках? Для каждого такого значения найдите уравнение соответствующей прямой.

Решение. Пусть $P(p; f(p))$ и $Q(q;\ f(q))$, где $p < q$, - точки касания некоторой прямой с графиком функции $y = f(x)$. Тогда $k = f'(p) = f'(q) = \frac{f(p)-f(q)}{p-q}$, где k – угловой коэффициент этой прямой.

Так как $f'(x) = 4x^3 + 2bx\ + 1$, то из равенства $f'(p) = f'(q)$ и неравенств $p < q$ и $p^3 < q^3$ следует, что $b < 0$.

Выписав, далее, равенство $f'(p) + f'(q) = \frac{2(f(p)-f(q))}{p-q}$, преобразуем его к виду

$2(p^3 + q^3) = (p + q)(p^2 + q^2)$.

Отсюда $(p + q)(p - q)^2 = 0$ и, поскольку $p \neq q$, то $p + q = 0$. Вновь воспользовавшись равенством $f'(p) = f'(q)$, найдем $p = -\sqrt{-\frac{b}{2}}$, $q = \sqrt{-\frac{b}{2}}$, $f(p) = -\frac{b^2}{4} - \sqrt{-\frac{b}{2}}$,

$f(q) = -\frac{b^2}{4} + \sqrt{-\frac{b}{2}}$. Прямая PQ, следовательно, имеет уравнение $y = x - \frac{b^2}{4}$.

Ответ: при $b < 0$; $y = x - \frac{b^2}{4}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Ход решения верный, но в конце его допущены ошибки	∓	5
Установлено только, что $a < 0$	∸	3

Задание 8.

Про натуральные числа X, Y и Z известно, что они различны и не превосходят 100. Мы можем выписать любую последовательность $(a_1, \dots, a_{100})$, содержащую все натуральные числа от 1 до 100. Какое наименьшее число последовательностей нужно выписать, чтобы среди них наверняка имелась такая, в которой два или три подряд идущих члена принадлежат множеству $\{X; Y; Z\}$?

Решение. Среди чисел X, Y и Z найдутся два, разность которых четна. Покажем, как выписать 25 последовательностей, чтобы среди них наверняка нашлась такая, в которой эти два числа являются соседними.

Любые два числа с разностью 2 или 98 являются соседними в последовательности

(100, 2, 4, 6. …, 98, 99, 1, 3, 5, …, 97). Аналогично, для каждого натурального $k \leq 25$ можно выписать последовательность, среди пар соседей в которой встречаются все пары чисел с разностями $2k$ и $100 – 2k$. Например, если $k = 9$, то сначала пишем 100,18,36,54,72,90, затем 99,17,35,53,71,89 и так далее, до чисел 91,1,19,37,55,73.

Меньшего числа последовательностей может оказаться недостаточно. В самом деле, если выписать $m \leq 24$ последовательностей, то по меньшей мере $99 - 2m \geq 51$ чисел ни в одной из них не являются соседями числа X, причем Y и Z могут оказаться среди этих 51. Кроме того, может также оказаться, что множество всех соседей числа Y, насчитывающее

$2m \leq 48$, не содержит Z.

Ответ: 25.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	16
Только приведён пример нужных 25 последовательностей	∓	6
Доказано только, что требуется не меньше 25 последовательностей	∓	6