8-9 класс, Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

Зайцы играли в прятки. Изначально три зайца искали всех остальных. Если зайца находят, то он сам начинает искать. Всех зайцев нашли, и они начали обсуждать свои успехи. Оказалось, что 99 зайцев никого не нашли, а остальные нашли по три зайца (одного зайца всегда находит ровно один другой заяц). Сколько всего было зайцев?

Решение. Пусть количество зайцев равняется x. Посчитаем количество раз, когда один заяц нашел другого, двумя способами. С одной стороны, по условию оно равняется $3(x-99)$. С другой стороны, это количество равняется $x-3$, потому что каждого зайца, кроме трёх изначальных, нашли ровно один раз.

Решаем уравнение: $3(x-99)=x-3 \Rightarrow 2x=294 \Rightarrow x=147$. Таким образом, ответ равен 147.

Ответ: 147.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Получен верный ответ, но обоснование неполное	±	6-9
При верном ходе решения допущены арифметические ошибки	∓	3-6
Получен верный ответ, но обоснование содержит ошибки	∸	1-2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 2 (10 баллов)

В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 23 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей спереди на 25% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей сзади Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время, кроме Гриши, в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

Решение. Пусть перед Гришей находилось x человек, тогда сзади него – $x-23$. Из первого условия и неравенства $x \geq 23$ следует, что число x является двузначным.

Посчитаем количество цифр на талонах у людей, стоящих перед Гришей: $x+x-9=2x-9$.

Также заметим, что сзади Гриши находятся ровно $99 - x$ двузначных чисел, а остальные — трёхзначные, потому что $x + x - 23 < 1000$.
Посчитаем количество цифр на талонах у людей, стоящих сзади Гриши:

$$2(99 - x) + 3(2x - 23 - 99) = 4x - 168.$$

Используя третье условие, составляем уравнение:

$$1.25(4x - 168) = 2x - 9 \Rightarrow 3x = 201 \Rightarrow x = 67.$$

Таким образом, общее число людей равнялось $x + x - 23 = 111$
Ответ: 111.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Получен верный ответ, но обоснование неполное (например, составлено верное уравнение, но не указано, на основе чего это сделано)	±	6-9
При верном ходе решения допущены арифметические ошибки, верный ответ не найден	∓	3-6
Имеется продвижение в решении задачи	∸	1-2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 3 (12 баллов)

Разность кубов двух целых чисел равна простому числу p. Найдите их произведение.
Решение. Пусть a и b – данные числа, причём $a > b$. Тогда по условию $a^3 - b^3 = p$. Значит, $p = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$. Получается, что простое число представили в виде произведения двух множителей. Это возможно только когда множители равны 1 и p либо -1 и $-p$. Заметим, что второй случай невозможен, так как тогда $a - b < 0$, что противоречит предположению.

Нужно рассмотреть два случая:

1) $a - b = 1, a^2 + b^2 + ab = p$.

Отметим, что в этом случае p – нечётное простое число.
Получаем $p = a^2 + b^2 - 2ab + 3ab = (a - b)^2 + 3ab = 1 + 3ab$. Откуда $ab = \frac{p-1}{3}$.

2) $a - b = p, a^2 + b^2 + ab = 1$.

Из условия задачи следует, что $ab \neq 0$. Заметим, что произведение ab также не может быть положительным, так как иначе

$$a^2 + b^2 + ab = (a - b)^2 + 3ab > 1.$$

Пусть $ab < 0$. Тогда $a^2 + b^2 + ab = (a + b)^2 - ab = 1$.
Если $(a + b)^2 > 0$, то $(a + b)^2 - ab > 1$.
Если $(a + b)^2 = 0$, то $a = -b$ и $ab = -1$, откуда $a = 1$ и $b = -1$. Тогда $p = 2$.

Таким образом, либо $ab = -1$, либо $ab = \frac{p-1}{3}$.

Ответ: -1 или $\frac{p-1}{3}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Разобраны все возможные случаи, но обоснование содержит пробелы		8-10
Один из случаев не разобран	±	6
В задаче имеется существенное продвижение, но ответ не найден.	∓	3-6
Имеется продвижение в решении задачи		1-2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 4 (12 баллов)

В университете учатся 2023 студента, причём некоторые из них дружат друг с другом (все дружбы взаимны). Могло ли оказаться так, что любые два студента имеют ровно одного общего знакомого среди остальных студентов?

Решение. Да, могло, построим пример. Отдельно выделим студента А, всех остальных разобьём на пары. Внутри каждой пары подружим студентов между собой, а также всех 2022 студентов подружим со студентом А. В такой конфигурации условие будет выполнено: у любой пары студентов будет ровно один общий друг.

Ответ: Да.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведен и обоснован верный ответ	+	12
Получен верный ответ, но обоснование содержит небольшие пробелы	±	6
Ответ не найден и/или не обоснован	–	0

Задание 5 (12 баллов)

Ненулевые числа a, b, c таковы, что $a^2 - b^2 - bc = 0$ и $b^2 - c^2 - ca = 0$. Докажите, что $a^2 - c^2 - ab = 0$.

Решение. Перепишем данные равенства в виде: $\boldsymbol{a^2 - b^2 = bc}$ и $\boldsymbol{b^2 - c^2 = ca}$. Разделим обе части первого и второго равенства на c^2 и обозначим $p = \frac{a}{c}, q = \frac{b}{c}$, тогда имеем: $p^2 - q^2 = q$ и $q^2 - 1 = p$.

Сложив оба равенства, получаем: $p^2 - 1 = q + p(1)$.

С другой стороны, из первого равенства получаем, что $p^2 = q(q+1)$, выразим $(q+1)$ и подставим во второе:

$(q-1)(q+1) = p$

$$(q-1)\cdot\frac{p^2}{q}=p$$

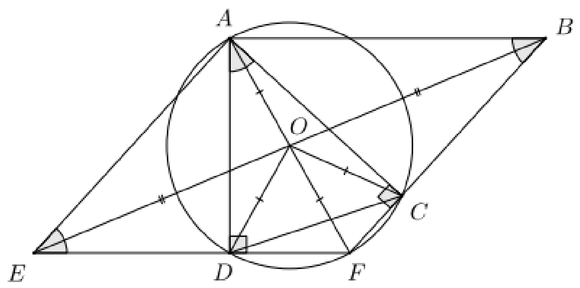
$(q-1)p=q$, откуда $p+q=pq$. Подставим это в (1):

$p^2-1=$ pq, и вспомним, что такое p и q: $\frac{a^2}{c^2}-1=\frac{a}{c}\frac{b}{c}$, откуда и получаем то, что требовалось.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Полное доказательство не приведено	–	0

Задание 6 (14 баллов)

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle DEA=\angle DAC=\angle CBA$ и $\angle ADE=\angle ACB=90^0$. Докажите, что прямая BE проходит через центр описанной около треугольника ACD окружности.



Решение. Пусть $BC\cap DE=F$ и $\angle DEA=\angle DAC=\angle CB\text{A}=\alpha$.

Тогда $\angle CFD=180°-\alpha$ и $AE\parallel BF$, $AB\parallel EF\Rightarrow ABFE$ – параллелограмм. Пусть O - точка пересечения его диагоналей. Тогда в прямоугольных треугольниках ADF и ACF: $DO=AO=FO=CO\Rightarrow$ точка O – центр окружности, описанной около $ACFD$. Но O лежит и на BE, поскольку диагонали параллелограмма пересекаются в их серединах.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Приведено доказательство, но в нем имеются пробелы.	±	6
Полное доказательство не приведено	–	0

Задание 7 (14 баллов)

Изначально на доске написано число 0. В первый день Волк прибавил число 2 к числу на доске, во второй день Волк еще прибавил $2 \cdot 3$ к уже написанному числу на доске и т.д. В k-ый день Волк прибавлял к числу на доске произведение первых k простых чисел. Найдите все натуральные n такие, что после n-ого прибавления на доске оказалась написана степень двойки.

Решение. Заметим, что $n = 1$ и $n = 2$ подходят под условие задачи, потому что 2 и $2 + 2 \cdot 3$ являются степенями двойки. Докажем, что все остальные натуральные n не подходят. Заметим, что после третьего прибавления остаток числа на доске при делении на 7 не будет меняться, потому что будут прибавляться только числа, кратные 7. Этот остаток будет такой же, как и у числа $2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 38$, то есть остаток равен 3. В свою очередь, степени двойки при делении на 7 могут давать только остатки 1, 2 и 4. Таким образом, начиная с третьего прибавления число не может равняться степени двойки.
Ответ: $n = 1$ и $n = 2$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Приведены значения $n = 1$ и $n = 2$, но доказательство того, что другие значения не подходят содержит пробелы	±	6-8
Приведены значения $n = 1$ и $n = 2$, но доказательство того, что другие значения не подходят, содержит существенные пробелы	∓	2
Решение не приведено или содержит существенные ошибки	–	0

Задача 8 (16 баллов)

В каждой клетке таблицы 10×10 стоит целое число. При каком наибольшем натуральном k можно гарантированно утверждать, что из этой таблицы можно по линиям сетки вырезать связную фигуру (возможно, даже всю таблицу), сумма чисел внутри которой делится на k? Связной фигурой будем называть такое множество клеток, что от каждой из них можно добраться до любой другой клетки этого множества, перемещаясь каждый раз только в соседнюю по стороне клетку этого множества.

Решение. Покажем, что при $k > 100$ фигуру вырезать получится не всегда. Расставим в каждую клетку единицу. Тогда сумма внутри любой фигуры будет больше 0, но меньше k, а, значит, такой фигуры не найдётся. Теперь покажем, что $k = 100$ подходит под условие задачи. Выберем внутри таблицы 100 связных фигур так, чтобы для любых двух выбранных фигур выполнялись два условия:

1) Одна из них полностью находится внутри другой.

2) Их разность также является связной фигурой (разностью будем называть объединение клеток, которые не содержатся в меньшей, но содержатся в большей). Например, так можно сделать змейкой, начиная с одной клетки, заканчивая всей таблицей (см. рисунок).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

В качестве первой фигуры возьмём клетку с номером 1, в качестве второй фигуры - объединение клеток с номерами 1 и 2 и т.д. В качестве i-ой фигуры будет выбрано объединение клеток с номерами от 1 до i. Пусть $i > j$, тогда разностью $i -$ ой и $j -$ ой фигуры будет объединение клеток с номерами от $i + 1$ до j, что является связной фигурой.

Посмотрим на остаток при делении на 100 сумм внутри каждой из этих фигур. Если в какой-то фигуре остаток 0, то мы нашли нужную фигуру, которую можно вырезать. Если остатка 0 нет, то по принципу Дирихле найдутся две фигуры с одинаковым остатком, тогда нам подойдет их разность.

Ответ: $k = 100$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	16
Приведены значения $k = 100$, и пример для этого случая, но не доказано, k>100 не подходит	±	8
Доказано, что k>100 не подходит, но пример для k=100 не приведен	±	4
Решение не приведено или содержит существенные ошибки	–	0

8-9 класс, Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

Зайцы играли в прятки. Изначально четыре зайца искали всех остальных. Если зайца находят, то он сам начинает искать. Всех зайцев нашли, и они начали обсуждать свои успехи. Оказалось, что 103 зайца никого не нашли, а остальные нашли по четыре зайца (одного зайца всегда находит ровно один другой заяц). Сколько всего было зайцев?

Решение. Пусть количество зайцев равняется x. Посчитаем количество раз, когда один заяц нашел другого, двумя способами. С одной стороны, по условию оно равняется $4(x - 103)$. С другой стороны, это количество равняется $x - 4$, потому что каждого зайца, кроме четырёх изначальных, нашли ровно один раз. Решаем уравнение: $4(x - 103) = x - 4 \Rightarrow 3x = 408 \Rightarrow x = 136$. Таким образом, ответ равен 136.

Ответ: 136.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	10
Получен верный ответ, но обоснование неполное	±	6-9
При верном ходе решения допущены арифметические ошибки	∓	3-6
Получен верный ответ, но обоснование содержит ошибки	-̇	1-2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 2 (10 баллов)

В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 31 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей сзади на 25% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей спереди Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

Решение. Пусть перед Гришей находилось x человек, тогда сзади него — $(x – 31)$. Из первого условия и неравенства $x \geq 31$ следует, что число x является двузначным. Посчитаем количество цифр на талонах у людей, стоящих перед Гришей: $x + x - 9 = 2x - 9$. Также заметим, что сзади Гриши находятся ровно $99 - x$ двузначных чисел, а остальные — трёхзначные, потому что $x + x - 31 < 1000$. Посчитаем сумму цифр на талонах у людей, стоящих сзади Гриши: $2(99 - x) + 3(2x - 31 - 99) = 4x - 192$. Используя третье условие, составляем уравнение: $4x - 192 = 1.25 \cdot (2x - 9) \Rightarrow 1.5x = 180.75 \Rightarrow x = 120.5$. Таким образом, значение величины x, которое по смыслу задачи должно быть целым неотрицательным числом, оказалось равным 120.5. Задача решений не имеет. Заметим, что $2x - 31 = 210$.

Ответ: Решений нет.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью, получен и обоснован вывод об отсутствии решений	+	10
Составлены и решены уравнения, получен ответ 210	+.	8
Сделан вывод об отсутствии решений, но обоснование содержит пробелы	±	6
Имеются продвижения в решении (найдено количество цифр на талонах у людей, стоящих впереди или позади Гриши и т.п.)	∓	1-3
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 3 (12 баллов)

Сумма кубов двух целых чисел равна простому числу p. Найдите их произведение.

Решение. Пусть a и b – данные числа, ни одно из которых не равно нулю. Тогда по условию $a^3 + b^3 = p$. Отсюда $p = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$. Получается, что простое число представили в виде произведения двух множителей.

Это возможно только когда множители равны 1 и p либо -1 и $-p$.

Рассмотрим возможные случаи:

1) $a + b = -1, a^2 + b^2 - ab = -p$.

Тогда $a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab = 1 - 3ab = -p$.

Заметим, что при $ab < 0$, получаем $1 - 3ab > 0 \neq -p$. Значит, $ab > 0$.

Так как $a + b = -1$, то $a < 0$ и $b < 0$. Но тогда сумма их кубов равна отрицательному числу;

2) $a + b = -p, a^2 + b^2 - ab = -1$.

Тогда $a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab = p^2 - 3ab = -1$.

Отсюда $ab > 0$. Так как $a + b = -p$, то $a < 0$ и $b < 0$, что что противоречит условию так же как в первом случае;

3) $a + b = 1, a^2 + b^2 - ab = p$.

Тогда $p = (a+b)^2 - 3ab = 1 - 3ab$. Получаем $ab = \frac{1-p}{3}$.

4) $a + b = p, a^2 + b^2 - ab = 1$. Заметим, что из второго равенства $ab > 0$. Тогда $a^2 + b^2 - ab = (a - b)^2 + ab = 1$. Если $(a - b)^2 > 0$, то $(a - b)^2 + ab > 1$. Если $(a - b)^2 = 0$, то $a = b$ и $ab = 1$.

$a = b = -1$ противоречит первому равенству, а $a = b = 1$ подходит.

Тогда $p = 2$.

Таким образом, либо $ab = 1$, либо $ab = \frac{1-p}{3}$.

Ответ: 1 или $\frac{1-p}{3}$**.**

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Разобраны все возможные случаи, но обоснование содержит пробелы	±	8-10
Один из случаев не разобран	±	6
В задаче имеется существенное продвижение, но ответ не найден.	∓	3-6
Имеется продвижение в решении задачи	∓	1-2
Решение отсутствует или содержит существенные ошибки	–	0

Задание 4 (12 баллов)

В университете учатся 2025 студентов, причём некоторые из них дружат друг с другом (все дружбы взаимны). Могло ли оказаться так, что любые два студента имеют ровно одного общего знакомого среди остальных студентов?

Решение. Да, могло, построим пример. Отдельно выделим студента А, всех остальных разобьём на пары. Внутри каждой пары подружим студентов между собой, а также всех 2024 студентов подружим со студентом А. В такой конфигурации условие будет выполнено: у любой пары студентов будет ровно один общий друг.

Ответ. Да.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Приведен и обоснован верный ответ	+	12
Получен верный ответ, но обоснование содержит небольшие пробелы	±	6
Ответ не найден и/или не обоснован	–	0

Задание 5 (12 баллов)

Ненулевые числа a, b, c таковы, что $a^2 - b^2 + bc = 0$ и $b^2 - c^2 + ca = 0$. Докажите, что $a^2 - c^2 - ab = 0$.

Решение. Перепишем данные равенства в виде:

$a^2 - b^2 = -bc$ и $b^2 - c^2 = -ca$.

Разделим обе части первого и второго равенства на c^2 и обозначим

$p = \frac{a}{c}, q = \frac{b}{c}$, тогда имеем:

$p^2 - q^2 = -q$ и $q^2 - 1 = -p$.

Сложив оба равенства, получаем: $p^2 - 1 = -q - p (1)$.

С другой стороны из первого равенства получаем, что $p^2 = q(q-1)$, выразим $(q-1)$ и подставим во второе:

$(q-1)(q+1) = p$

$(q+1) \cdot \frac{p^2}{p} = -p$

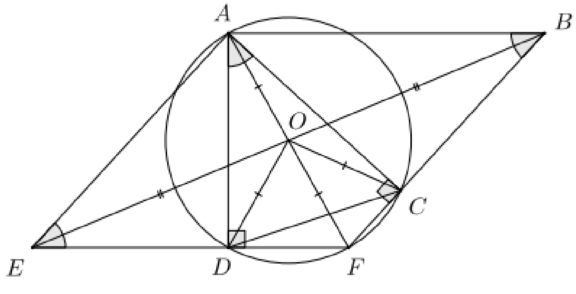
$(q + 1)p = -q$, откуда $p + q = -pq$. Подставим это в (1):

$p^2 - 1 = pq$ и вспомним, что такое p и q: $\frac{a^2}{c^2} - 1 = \frac{a}{c}\frac{b}{c}$, откуда и получаем то, что требовалось.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	12
Полное доказательство не приведено	–	0

Задание 6 (14 баллов)

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle DEA = \angle DAC = \angle CBA$ и $\angle ADE = \angle ACB = 90^0$. Докажите, что прямая BE проходит через центр описанной около треугольника ACD окружности.



Решение. Пусть $BC \cap DE = F$ и $\angle DEA = \angle DAC = \angle CBA = \alpha$. Тогда $\angle CFD = 180° - \alpha$ и $AE \parallel BF$, $AB \parallel EF \Rightarrow ABFE$ – параллелограмм. Пусть O - точка пересечения его диагоналей. Тогда в прямоугольных треугольниках ADF и ACF: $DO = AO = FO = CO \Rightarrow$ точка O – центр окружности, описанной около $ACFD$. Но O лежит и на BE, поскольку диагонали параллелограмма пересекаются в их серединах.

Содержание критерия	Оценка	Баллы

Задача решена полностью	+	14
Приведено доказательство, но в нем имеются пробелы.	±	6
Полное доказательство не приведено	–	0

Задание 7 (14 баллов)

Изначально на доске написано число 2. В первый день Волк прибавил число 2 к числу на доске, во второй день Волк еще прибавил $2 \cdot 3$ к уже написанному числу на доске и т.д. В k-ый день Волк прибавлял к числу на доске произведение первых k простых чисел. Найдите все натуральные n такие, что после n-ого прибавления на доске оказалась написана степень двойки.

Решение. Заметим, что $n = 1$ подходит под условие задачи, потому что $2 + 2$ является степенью двойки, а $n = 2$ не подходит, потому что $2 + 2 + 2 \cdot 3 = 10$ не является степенью двойки. Докажем, что все остальные натуральные n не подходят.
Заметим, что после третьего прибавления остаток числа на доске при делении на 7 не будет меняться, потому что будут прибавляться только числа, кратные 7. Этот остаток будет такой же, как и у числа $2 + 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 20$, то есть остаток равен 5.
В свою очередь, степени двойки при делении на 7 могут давать только остатки 1, 2 и 4. Таким образом, начиная с третьего прибавления число не может равняться степени двойки.
Ответ: $n = 1$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	14
Приведено значение $n = 1$, но доказательство того, что другие значения не подходят, содержит пробелы	±	6-8
Приведено значение $n = 1$, но доказательство того, что другие значения не подходят, содержит существенные пробелы	∓	2
Решение не приведено или содержит существенные ошибки	–	0

Задача 8 (16 баллов)

В каждой клетке таблицы 9×9 стоит целое число. При каком наибольшем натуральном k можно гарантированно утверждать, что из этой таблицы можно по линиям сетки вырезать связную фигуру (возможно, даже всю таблицу), сумма чисел внутри которой делится на k? Связной фигурой будем называть такое множество клеток, что от каждой из них можно добраться до любой другой клетки этого множества,перемещаясь каждый раз только в соседнюю по стороне клетку этого множества.

Решение. Покажем, что при $k > 81$ фигуру вырезать получится не всегда. Расставим в каждую клетку единицу. Тогда сумма внутри любой фигуры будет больше 0, но меньше k, а значит такой фигуры не найдётся. Теперь покажем, что $k = 81$ подходит под условие задачи. Выберем внутри таблицы 81 связную фигуру так, чтобы для любых двух выбранных фигур выполнялись два условия:

1) Одна из них полностью находится внутри другой.
2) Их разность также является связной фигурой (разностью будем называть объединение клеток, которые не содержатся в меньшей, но содержатся в большей). Например, так можно сделать змейкой, начиная с одной клетки, заканчивая всей таблицей (см. рисунок).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	17	16	15	14	13	12	11	10
19	20	21	22	23	24	25	26	27
36	35	34	33	32	31	30	29	28
37	38	39	40	41	42	43	44	45
54	53	52	51	50	49	48	47	46
55	56	57	58	59	60	61	62	63
72	71	70	69	68	67	66	65	64
73	74	75	76	77	78	79	80	81

В качестве первой фигуры возьмём клетку с номером 1, в качестве второй фигуры - объединение клеток с номерами 1 и 2 и т.д. В качестве i-ой фигуры будет выбрано объединение клеток с номерами от 1 до i. Пусть $i > j$, тогда разностью i-ой и j-ой фигуры будет объединение клеток с номерами от $i + 1$ до j, что является связной фигурой.

Посмотрим на остаток при делении на 81 сумм внутри каждой из этих фигур. Если в какой-то фигуре остаток 0, то мы нашли нужную фигуру, которую можно вырезать. Если остатка 0 нет, то по принципу Дирихле найдутся две фигуры с одинаковым остатком, тогда нам подойдет их разность.

Ответ: $k = 100$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача решена полностью	+	16
Приведены значения $k = 81$, и пример для этого случая, но не доказано, k>81 не подходит	±	8
Доказано, что k>81 не подходит, но пример для k=81 не приведен	±	4
Решение не приведено или содержит существенные ошибки	–	0