

## 10 класс, Вариант 1

### Задание 1 (10 баллов)

В очереди стояло  $n$  людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до  $n$ ). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 23 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей спереди на 25% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей сзади Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

### Задание 2 (10 баллов)

Найдите все такие пары натуральных чисел  $(a; b)$ , для которых  
 $4 \text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = (a + b)^2 + 1$ .

### Задание 3 (12 баллов)

Дана квадратная таблица  $50 \times 50$ . В каждой её клетке стоит либо единица, либо ноль, причём сумма всех чисел в таблице равна 1250. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковая сумма чисел.

### Задание 4 (12 баллов)

В треугольнике  $ABC$  проведены биссектриса  $AA_1$  и высота  $BB_1$ . Доказать, что если  $\angle AA_1B = 45^\circ$ , то окружность, описанная около треугольника  $A_1B_1C$ , касается прямой  $AA_1$ .

### Задание 5 (12 баллов)

Функция, принимающая только неотрицательные значения, удовлетворяет равенству:  $f(x + y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$ , при этом  $f(1) + f(4) = 9$ . Найдите  $f(2^{2023})$ .

### Задание 6 (14 баллов)

Найдите  $a, b, c$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3, \\ (3a + 3b)^2 = c^3, \\ a^2 - ab + b^2 = c^2. \end{cases}$$

### Задание 7 (14 баллов)

Дано 10 различных натуральных чисел. На доску выписали все эти числа и все возможные произведения, составленные из этих чисел (все произведения 2 чисел, все произведения 3 чисел, ..., произведение 10 чисел). Какое наименьшее количество различных значений могло оказаться на доске?

### Задача 8 (16 баллов)

Заяц и Волк играют в игру на клетчатой доске  $10 \times 10$ . Сначала Волк ставит фишку на одну из клеток. Далее, начиная с Зайца, игроки по очереди передвигают фишку. Заяц всегда передвигает фишку на 1 клетку по диагонали, а Волк на одну клетку по горизонтали или вертикали, причём нельзя ставить фишку на клетку, на которой фишка уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

## 10 класс, Вариант 2

### Задание 1 (10 баллов)

В очереди стояло  $n$  людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до  $n$ ). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 31 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей сзади на 20% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей спереди Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

### Задание 2 (10 баллов)

Найдите все такие пары натуральных чисел  $(a; b)$ , для которых

$$\text{НОК}(a, b) + 4 \text{НОД}(a, b) = (a + b)^2 + 1.$$

### Задание 3 (12 баллов)

Дана квадратная таблица  $70 \times 70$ . В каждой её клетке стоит либо единица, либо ноль, причём сумма всех чисел в таблице равна 2450. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковая сумма чисел.

#### Задание 4 (12 баллов)

В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AA_1$  и высота  $BB_1$  пересекаются в точке  $O$ . Оказалось, что  $\angle AA_1B = 45^\circ$ . Докажите, что окружность, описанная

#### Задание 5 (12 баллов)

Функция, принимающая только неотрицательные значения, удовлетворяет равенству:  $f(x + y) = \sqrt{f^2(x) + f^2(y)}$ , при этом  $f(1) + f(4) = 12$ . Найдите  $f(2^{2024})$ .

#### Задание 6 (14 баллов)

Найдите  $a, b, c$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + 3abc = c^3, \\ (2a + 2b)^2 = c^3, \\ a^2 - ab + b^2 = c^2. \end{cases}$$

#### Задание 7 (14 баллов)

Дано 11 различных натуральных чисел. На доску выписали все эти числа и все возможные произведения, составленные из этих чисел (все произведения 2 чисел, все произведения 3 чисел, ..., произведение 11 чисел). Какое наименьшее количество различных значений могло оказаться на

#### Задача 8 (16 баллов)

Заяц и Волк играют в игру на клетчатой доске  $12 \times 12$ . Сначала Волк ставит фишку на одну из клеток. Далее, начиная с Зайца, игроки по очереди передвигают фишку. Заяц всегда передвигает фишку на 1 клетку по диагонали, а Волк на одну клетку по горизонтали или вертикали, причём нельзя ставить фишку на клетку, на которой фишка уже была. Проигрывает