

8-9 класс, Вариант 1

Задание 1 (10 баллов)

Зайцы играли в прятки. Изначально три зайца искали всех остальных. Если зайца находят, то он сам начинает искать. Всех зайцев нашли, и они начали обсуждать свои успехи. Оказалось, что 99 зайцев никого не нашли, а остальные нашли по три зайца (одного зайца всегда находит ровно один другой заяц). Сколько всего было зайцев?

Задание 2 (10 баллов)

В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 23 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей спереди на 25% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей сзади Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время, кроме Гриши, в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

Задание 3 (12 баллов)

Разность кубов двух целых чисел равна простому числу p . Найдите их произведение.

Задание 4 (12 баллов)

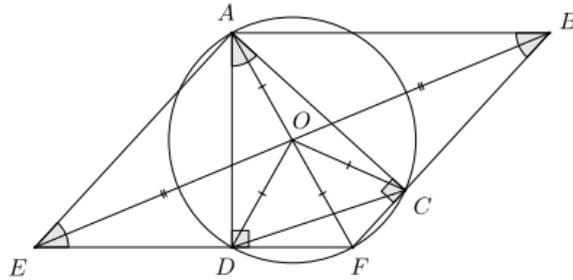
В университете учатся 2023 студента, причём некоторые из них дружат друг с другом (все дружбы взаимны). Могло ли оказаться так, что любые два студента имеют ровно одного общего знакомого среди остальных студентов?

Задание 5 (12 баллов)

Ненулевые числа a, b, c таковы, что $a^2 - b^2 - bc = 0$ и $b^2 - c^2 - ca = 0$.
Докажите, что $a^2 - c^2 - ab = 0$.

Задание 6 (14 баллов)

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle DEA = \angle DAC = \angle CBA$ и $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$. Докажите, что прямая BE проходит через центр описанной около треугольника ACD окружности.



Задание 7 (14 баллов)

Изначально на доске написано число 0. В первый день Волк прибавил число 2 к числу на доске, во второй день Волк еще прибавил $2 \cdot 3$ к уже написанному числу на доске и т.д. В k -ый день Волк прибавлял к числу на доске произведение первых k простых чисел. Найдите все натуральные n такие, что после n -ого прибавления на доске оказалась написана степень двойки.

Задача 8 (16 баллов)

В каждой клетке таблицы 10×10 стоит целое число. При каком наибольшем натуральном k можно гарантированно утверждать, что из этой таблицы можно по линиям сетки вырезать связную фигуру (возможно, даже всю таблицу), сумма чисел внутри которой делится на k ? Связной фигурой будем называть такое множество клеток, что от каждой из них можно добраться до любой другой клетки этого множества, перемещаясь каждый раз только в соседнюю по стороне клетку этого множества.

8-9 класс, Вариант 2

Задание 1 (10 баллов)

Зайцы играли в прятки. Изначально четыре зайца искали всех остальных. Если зайца находят, то он сам начинает искать. Всех зайцев нашли, и они начали обсуждать свои успехи. Оказалось, что 103 зайца никого не нашли, а остальные нашли по четыре зайца (одного зайца всегда находит ровно один другой заяц). Сколько всего было зайцев?

Задание 2 (10 баллов)

В очереди стояло n людей, каждый из них получил талон со своим номером в очереди (от 1 до n). Гриша влез внутрь очереди без талона. Он сразу заметил несколько фактов:

1. Человек с талоном номер 100 стоял сзади.
2. Спереди от Гриши количество людей на 31 больше, чем сзади.
3. Общее количество цифр на талонах у людей сзади на 25% больше, чем общее количество цифр на талонах у людей спереди Гриши.

После этого Гришу заметили и отправили в самый конец очереди. За это время кроме Гриши в очереди люди не уходили и никак не менялись. Сколько людей было в очереди перед приходом Гриши?

Задание 3 (12 баллов)

Сумма кубов двух целых чисел равна простому числу p . Найдите их произведение.

Задание 4 (12 баллов)

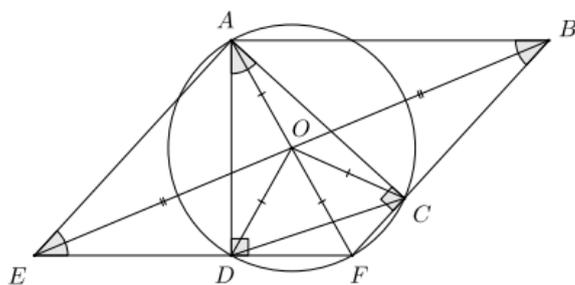
В университете учатся 2025 студентов, причём некоторые из них дружат друг с другом (все дружбы взаимны). Могло ли оказаться так, что любые два студента имеют ровно одного общего знакомого среди остальных студентов?

Задание 5 (12 баллов)

Ненулевые числа a, b, c таковы, что $a^2 - b^2 + bc = 0$ и $b^2 - c^2 + ca = 0$. Докажите, что $a^2 - c^2 - ab = 0$.

Задание 6 (14 баллов)

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle DEA = \angle DAC = \angle CBA$ и $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ$. Докажите, что прямая BE проходит через центр описанной около треугольника ACD окружности.



Задание 7 (14 баллов)

Изначально на доске написано число 2. В первый день Волк прибавил число 2 к числу на доске, во второй день Волк еще прибавил $2 \cdot 3$ к уже

написанному числу на доске и т.д. В k -ый день Волк прибавлял к числу на доске произведение первых k простых чисел. Найдите все натуральные n такие, что после n -ого прибавления на доске оказалась написана степень двойки.

Задача 8 (16 баллов)

В каждой клетке таблицы 9×9 стоит целое число. При каком наибольшем натуральном k можно гарантированно утверждать, что из этой таблицы можно по линиям сетки вырезать связную фигуру (возможно, даже всю таблицу), сумма чисел внутри которой делится на k ? Связной фигурой будем называть такое множество клеток, что от каждой из них можно добраться до любой другой клетки этого множества, перемещаясь каждый раз только в соседнюю по стороне клетку этого множества.

Посмотрим на остаток при делении на 81 сумм внутри каждой из этих фигур. Если в какой-то фигуре остаток 0, то мы нашли нужную фигуру, которую можно вырезать. Если остатка 0 нет, то по принципу Дирихле найдутся две фигуры с одинаковым остатком, тогда нам подойдет их разность.