

11 класс. Вариант 1

Задание 1. Пачка офисной бумаги в интернет-магазине стоит 630 руб., а при оплате за 15 пачек или более предусмотрен кешбэк в размере 10% от внесённой суммы. Как, имея изначально 20000руб., приобрести максимально возможное количество таких пачек? Определите это количество.

Решение. Любая пачка обойдётся покупателю не меньше, чем в

$(1-0,1) \cdot 630 = 567$ руб., а поскольку $20000 < 36 \cdot 567$, то купить удастся не более 35 пачек.

С другой стороны, 35 пачек приобрести можно. Внеся сначала $15 \cdot 630$ руб. за 15 пачек, после получения кешбэка покупатель будет иметь $20000 - 15 \cdot 630 + 15 \cdot 63 = 11495$ руб. Это позволит ему внести $18 \cdot 630 = 11340$ руб. за 18 пачек. Новый кешбэк составит 1134 руб., и у покупателя окажется $11495 - 11340 + 1134 = 1289$ руб. – сумма, достаточная для покупки ещё двух пачек бумаги.

Ответ: 35.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	10
Показан оптимальный вариант покупки, но обоснование оптимальности не приведено	+–	6
Верно указано ограничение сверху, но достижимость максимального значения не доказана	–+	3

Задание 2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{\lg(x^2-1)}}$.

Решение. Искомая область – объединение множеств решений систем

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \\ \lg(x^2 - 1) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 4 \leq 0 \\ \lg(x^2 - 1) < 0 \end{cases}$$

Первая система равносильна неравенству $x^2 \geq 4$ и имеет решение $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, вторая сводится к неравенствам $1 < x^2 < 2$, имеющим своим решением $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup [2; +\infty)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	10

Выписаны все необходимые соотношения, но решение не найдено	– + –	3
---	-------	---

Задание 3. Найдите все квадратные трёхчлены, максимальные значения каждого из которых на отрезках $[0; 1]$, $[1; 2]$ и $[2; 3]$ равны 3, 6 и 8 соответственно.

Решение. Пусть трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условиям задачи, а выполнены равенства $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = 6$, $f(x_3) = 8$, где x_1, x_2 и x_3 – числа, принадлежащие отрезкам $[0; 1]$, $[1; 2]$ и $[2; 3]$ соответственно. В силу тождества $f(x-1) - 2f(x) + f(x+1) = 2a$ и очевидных неравенств $f(x_2-1) \leq 3$, $f(x_2+1) \leq 8$ тогда $a = \frac{1}{2}(f(x_2-1) - 2f(x_2) + f(x_2+1)) \leq \frac{1}{2}(3 - 2 \cdot 6 + 8) = -\frac{1}{2} < 0$. Следовательно, ветви параболы $y = f(x)$ направлены вниз.

Неравенства $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ показывают, что $f(x)$ возрастает при $x \leq 2$, а потому $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, откуда $a + b + c = 3$, $4a + 2b + c = 6$, $b = 3 - 3a$, $c = 2a$ и $f(x) = ax^2 + (3 - 3a)x + 2a$.

При $a = -\frac{1}{2}$ имеем трёхчлен $f_0(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 1$, максимальное значение которого на отрезке $[2; 3]$ равно 8. Если же $f(x) = ax^2 + (3 - 3a)x + 2a$, где $a < -\frac{1}{2}$, то $f(x) = f_0(x) + (a + \frac{1}{2})(x-1)(x-2) < f_0(x)$ при любом $x > 2$. Это значит, что $f_0(x)$ – единственный трёхчлен, удовлетворяющий всем нужным требованиям.

Ответ: $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 1$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	12
Найден требуемый многочлен, но обоснование того, что он единствен, содержит пробелы	+ –	6
Найден требуемый многочлен, но обоснование того, что он единствен, содержит существенные пробелы	– +	4
Найден требуемый многочлен, но обоснование единственности отсутствует	– *	1

Задание 4. Все вершины тетраэдра $ABCD$ равноудалены от точки O . Зная, что $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $AC = BD = c$, найдите радиус сферы, проходящей через O и через середины рёбер AB , BC и AC .

Решение. Построим тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда $AKBLNDMC$ ($AN//KD//BM//LC$), проведя через его противоположные рёбра пары параллельных плоскостей. Ввиду равенств $KL=CD=AB$, $KM=AC=BD$ и $KN=BC=AD$ все грани этого параллелепипеда будут прямоугольниками, а сам параллелепипед – прямоугольным; точка O окажется его центром, а середины рёбер AB , BC и AC – центрами граней $AKBL$, $BLCM$ и $ALCN$ соответственно. Все эти центры принадлежат сфере, построенной на отрезке OL как на диаметре. Следовательно, искомый радиус равен $r = \frac{1}{2}OL = \frac{1}{4}LD = \frac{1}{4}\sqrt{LA^2 + LB^2 + LC^2}$, учитывая, что $LA^2 + LB^2 = a^2$, $LB^2 + LC^2 = b^2$, $LA^2 + LC^2 = c^2$, получаем $r = \frac{1}{8}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Ответ: $\frac{1}{8}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	++	12

Задание 5. Решите уравнение $3^{-\frac{1}{2}} + 6^{-\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{-\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.

Решение. ОДЗ неизвестного определяется системой неравенств $\sin x > 0$, $\cos x > 0$. Уравнение $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sin x}{\sqrt{6}} = \frac{\cos x}{\sqrt{2}}$, являющееся следствием исходного, преобразуется к уравнению $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Корни последнего описываются формулой $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Проверка оставляет только числа вида $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$.

Ответ: $\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	++	12
Ответ содержит все верные решения и посторонние корни, ОДЗ указана	– +	3
ОДЗ не найдена, ответ содержит посторонние корни	– *	1

Задание 6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC = \angle CAD$ и $AB > AD$. Прямая, делящая его внешний угол при вершине A пополам,

пересекает прямые BC , CD и BD в точках P , Q и R соответственно. Найдите длину отрезка AP , если $AQ=3$, $AR=18$.

Решение. Заметим, что лучи AP и AC являются биссектрисами двух смежных углов. Поэтому $AP \perp AC$ и $BB' \parallel AC \parallel DD'$, где B' и D' – проекции точек B и D на прямую AP .

Пусть b , c , d и p – длины отрезков AB' , AC , AD' и AP соответственно, $k = \operatorname{ctg} \angle BAC = \operatorname{ctg} \angle CAD$. Тогда $\frac{p-b}{p} = \frac{kb}{c}$ (в силу подобия треугольников $PB'B$ и PAC) и $\frac{3-d}{3} = \frac{kd}{c}$ (в силу подобия треугольников $QD'D$ и QAC); из этих равенств следует, что $\frac{1}{p} = \frac{1}{3} + \frac{1}{b} - \frac{1}{d}$.

Условие $AB > AD$ означает, что $BB' > DD'$, а потому точки B и R лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC . В силу подобия треугольников $RB'B$ и $RD'D$ имеем $\frac{18+b}{18-d} = \frac{kb}{kd}$, откуда $\frac{1}{b} - \frac{1}{d} = -\frac{1}{9}$; следовательно $\frac{1}{p} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$, $p = \frac{9}{2}$.

Ответ: $\frac{9}{2}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	++	14
Выписаны все необходимые соотношения, но верный ответ не получен/ Приведен верный ответ, но обоснование содержит пробелы	– +	6

Задание 7. Неизвестный 100-значный код составлен из цифр 1 и 2. За один шаг про любое натуральное число можно узнать, является ли оно фрагментом кода. (Фрагмент числа N – это любое число, образованное подряд идущими цифрами в записи N ; например, $N=1211$ имеет ровно восемь фрагментов: 1, 2, 12, 21, 11, 121, 211 и 1211). Докажите, что за 120 шагов можно узнать этот код.

Решение. Приведём план определения кода, предусматривающий не более 114 шагов. Этот план состоит из четырёх этапов.

Первый этап – определение максимального фрагмента, состоящего из одних единиц. Это делается методом двоичного поиска. (Сначала узнаём, является ли фрагментом кода число $\underbrace{1 \dots 1}_{50}$. Если да, то ставим вопрос о числе

$\underbrace{1 \dots 1}_{75}$, а если нет, то о числе $\underbrace{1 \dots 1}_{25}$. И далее с каждым шагом уменьшаем вдвое или почти вдвое числовой интервал, содержащий длину искомого фрагмента.) Так как $2^6 < 100 < 2^7$, то сделано будет 7 шагов.

Пусть m – количество цифр в найденном фрагменте. Если m равно 0 или 100, то код определён и дальнейшие этапы не нужны. Если же $1 \leq m \leq 99$, то переходим ко второму этапу.

Второй этап – наращивание фрагмента влево. Сначала узнаём, является ли фрагментом $(m+1)$ -значное число $A_1 = 2 \underbrace{1 \dots 1}_m$. Если не является, то код начинается с m единиц и нужно сразу переходить к четвертому этапу. Если же A_1 – фрагмент, то последовательно ставим вопросы о числах $A_2 = 2c_1 \underbrace{1 \dots 1}_m$, $A_3 = 2c_2c_1 \underbrace{1 \dots 1}_m$, $A_4 = 2c_3c_2c_1 \underbrace{1 \dots 1}_m$, ..., где c_i – цифра, определённая на i -ом шаге, $i=1, 2, 3, \dots$. Продолжаем так до тех пор, пока не получим $m+1$ отрицательных ответов подряд. Пусть k – наибольший номер, для которого $c_k=2$. Тогда код начинается с фрагмента $\underbrace{1 + 1}_{l} c_k \dots c_1 \underbrace{1 \dots 1}_m$, где l – некоторое целое число, $0 \leq l \leq m$.

Третий этап – определение начального фрагмента кода. Дело сводится к нахождению числа l . Применяя, как и на первом этапе, метод двоичного поиска, ставим вопросы о числах вида $\underbrace{1 + 1}_r c_k \dots c_1 \underbrace{1 \dots 1}_m$, где $0 \leq r \leq l$. Здесь потребуется не более 7 шагов, и нам станет известен начальный $(k + l + m + 1)$ -значный фрагмент.

Четвертый этап – наращивание фрагмента вправо. Последовательно делая по одному шагу, определяем с $(k + l + m + 2)$ -й по 100-ю цифры кода. (При $k + l + m + 1 = 100$ этот этап не нужен.) Таким образом, для реализации всего плана потребуется не более $7 + (k + m + 1) + 7 + (100 - k - l - m - 1) = 114$ шагов.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	14

Задание 8. Отрезок длины 1 двигали так, что оба его конца перемещались только по параболе $y = ax^2$, причём абсциссы соответствующих точек только возрастали. Весь отрезок первоначально находился в полуплоскости $x < 0$, а

в итоге оказался в полуплоскости $x > 0$. Найдите множество всех возможных значений параметра a .

Решение. Пусть $P(p; ap^2)$ и $Q(q; aq^2)$ – концы отрезка, причем $p > q$ и $PQ = 1$. Обозначим через φ величину угла PQQ' , где Q' – проекция точки Q на ось абсцисс. Тогда $q - p = -\sin\varphi$, $aq^2 - ap^2 = \cos\varphi$, откуда $q = -\frac{ctg\varphi}{2a} - \frac{\sin\varphi}{2}$. Если функция $q = q(\varphi)$, отображающая интервал $(0; \pi)$ в интервал $(-\infty; +\infty)$, строго возрастает, то отрезок длины 1 можно переместить так, как это указано в условии задачи.

Имеем $q'(\varphi) = \frac{1}{2a\sin^2\varphi} - \frac{\cos\varphi}{2}$. Неравенство $q'(\varphi) \geq 0$ преобразуется к виду $\sin^2\varphi\cos\varphi \leq \frac{1}{a}$, а исследование функции $u(\varphi) = \sin^2\varphi\cos\varphi$ показывает, что $u(\varphi) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$, причем равенство достигается только при $\varphi = \varphi_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. Это значит, что полуинтервал $(0; \frac{3\sqrt{3}}{2}]$ принадлежит множеству искомых значений a .

С другой стороны, при $a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ имеем $q'(\varphi_0) < 0$, функция $q(\varphi)$ убывает в окрестности числа φ_0 и движение отрезка не может удовлетворять всем заданным условиям. Покажем также, что, если $a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, то при движении отрезка обязательно был момент, когда выполнялось равенство $\varphi = \varphi_0$. В самом деле: для $p = 0$ имеем равенства $q = -\sin\varphi$, $aq^2 = \cos\varphi$ и, как следствие, соотношения $\cos\varphi = \frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2a} > 1 - \frac{1}{2a} > \cos\varphi_0$ и $\varphi < \varphi_0$. А при $p + q = 0$ имеем $\cos\varphi = aq^2 - ap^2 = 0$, то есть $\varphi = \frac{\pi}{2} > \varphi_0$. Ввиду непрерывности изменения величины φ и делаем вывод о существовании указанного момента.

Ответ: $(0; \frac{3\sqrt{3}}{2}]$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	16
Множество возможных значений параметра найдено и доказано, что все значения из этого множества удовлетворяют условиям задачи, но не доказано, что условиям задачи не удовлетворяют значения, не входящие в указанное множество.	+-	12
Имеется существенное продвижение в решении задачи (найдена функция одной переменной, описывающая движение отрезка)	-+	4

11 класс. Вариант 2

Задание 1. Набор пряжи в интернет-магазине стоит 620 руб., а при оплате за 20 или более наборов предусмотрен кешбэк в размере 15% от внесённой суммы. Как, имея изначально 30000 руб., приобрести максимально возможное количество таких наборов? Определите это количество, а также сумму, которую придётся на него потратить.

Решение. Любой набор обойдётся покупателю не меньше, чем в

$(1-0,15) \cdot 620 = 527$ руб., а поскольку $30000 < 57 \cdot 527$, то купить удастся не более 56 наборов.

С другой стороны, 56 наборов приобрести можно. Внося сначала $20 \cdot 620$ руб. за 20 наборов, после получения кешбэка покупатель будет иметь $30000 - 20 \cdot 620 + 0,15 \cdot 20 \cdot 620 = 19460$ руб. Это позволит ему внести $31 \cdot 620 = 19220$ руб. за 31 набор. Новый кешбэк составит $0,15 \cdot 19220 = 2883$ руб., и у покупателя окажется $19460 - 19220 + 2883 = 3123$ руб. – сумма, достаточная для покупки ещё 5 наборов пряжи.

Ответ: 56.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	10
Показан оптимальный вариант покупки, но обоснование оптимальности не приведено	+–	6
Верно указано ограничение сверху, но достижимость максимального значения не доказана	–+	3

Задание 2. Найдите область определения функции $y = \lg \frac{3-2x-x^2}{1-x^2}$.

Решение. Искомая область – решение неравенства $\frac{3-2x-x^2}{1-x^2} > 0$.

Применяя метод интервалов, находим ответ.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	10
Выписаны все необходимые соотношения, но решение не найдено	–+–	3

Задание 3. Найдите все квадратные трёхчлены, минимальные значения каждого из которых на отрезках $[0; 1]$, $[1; 2]$ и $[2; 3]$ равны 3, 6 и 7 соответственно.

Решение. Пусть трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условиям задачи и выполнены равенства $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = 6$, $f(x_3) = 7$, где x_1 , x_2 и x_3

– числа, принадлежащие отрезкам $[0; 1]$, $[1; 2]$ и $[2; 3]$ соответственно. Из неравенств $\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2} < 6$ и $1 \leq \frac{x_1+x_3}{2} \leq 2$ тогда получается, что $\frac{f(x_1)+f(x_3)}{2} \leq f\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)$. Следовательно, ветви параболы $y = f(x)$ направлены вниз.

Неравенства $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ показывают, что $f(x)$ возрастает при $x \leq 2$, а потому $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $f(x_1) = c = 3$, $f(x_2) = a + b + c = 6$, откуда $b = 3 - a$ и $f(x) = ax^2 + (3 - a)x + 3$.

Заметим теперь, что $f(3) = 6a + 12 \geq f(x_3) = 7$. Поэтому $a \geq -\frac{5}{6}$. При $a = -\frac{5}{6}$ имеем трёхчлен $f_0(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{23}{6}x + 3$, минимальное значение которого на отрезке $[2; 3]$ равно 7.

Если же $a > -\frac{5}{6}$, то $f(x) = f_0(x) + (a + \frac{5}{6})(x^2 - x) > f_0(x)$ при любом $x > 1$. Это значит, что трёхчлен $f_0(x)$ – единственный, удовлетворяющий всем требованиям.

Ответ: $-\frac{5}{6}x^2 + \frac{23}{6}x + 3$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	12
Найден требуемый многочлен, но обоснование того, что он единствен, содержит пробелы	+–	6
Найден требуемый многочлен, но обоснование того, что он единствен, содержит существенные пробелы	–+	4
Найден требуемый многочлен, но обоснование единственности отсутствует	–*	1

Задание 4. Все вершины тетраэдра $ABCD$ равноудалены от точки O . Зная, что $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $AC = BD = c$, найдите радиус сферы, проходящей через O и через середины медиан треугольника ABC .

Решение. Пусть в треугольнике ABC проведены медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 , середины которых обозначены через A_2 , B_2 и C_2 соответственно, а точка пересечения этих медиан – через M . Докажем, что тетраэдр $OA_2B_2C_2$ является образом тетраэдра $ABCD$ при гомотетии центром M и коэффициентом $\frac{1}{4}$.

Легко установить, что $\overrightarrow{MA_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MC}$. Для доказательства равенства $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$ рассмотрим отрезок $C_1C'_1$, где C'_1 – середина ребра CD . Этот отрезок является высотой, проведённой к основанию, в каждом из двух равных равнобедренных треугольников – AC'_1B и CC_1D ; ясно, что середина отрезка $C_1C'_1$ равноудалена от точек A , B , C и D , а потому совпадает с точкой O . Следовательно, плоскость OCD содержит точку C_1 , а

значит, и отрезок CC_1 с точкой M на нём. По аналогичным причинам точку M содержат плоскости OAD и OBD . Поэтому M – точка пересечения прямой OD с плоскостью ABC . Остаётся заметить, что тетраэдры $OABC$, $OABD$, $OBCD$ и $OACD$ равны, объём тетраэдра $OABC$ составляет $\frac{1}{4}$ объёма тетраэдра $ABCD$, откуда и выводится равенство $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MD}$.

Из доказанного следует, что искомый радиус равен $\frac{r}{4}$, где r – радиус описанной сферы тетраэдра $ABCD$. Найдём r .

Достроим тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда $APBQRDSC$ ($AR//PD//BS//QC$), проведя через его противоположные рёбра пары параллельных плоскостей. В силу равенств $PQ=CD=AB$, $PS=AC=BD$ и $PR=BC=AD$ все грани этого параллелепипеда будут прямоугольниками, а сам параллелепипед – прямоугольным. Диаметр его описанной сферы равен $2r = \sqrt{AP^2 + AQ^2 + AR^2}$, а поскольку $AP^2 + AQ^2 = AB^2 = a^2$, $AP^2 + AR^2 = BC^2 = b^2$ и $AQ^2 + AR^2 = c^2$, то $r = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$, $\frac{r}{4} = \frac{1}{16}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Ответ: $\frac{1}{16}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	++	12

Задание 5. Решите уравнение $2 - 6^{\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.

Решение. ОДЗ неизвестного задаётся системой неравенств $\sin x > 0$, $\cos x > 0$. Уравнение $2 - \sqrt{6} \sin x = \sqrt{2} \cos x$, являющееся следствием исходного, преобразуется к виду $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Корни последнего описываются формулой $x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Проверка оставляет только числа вида $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$.

Ответ: $\frac{1}{12}\pi + 2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	++	12
Ответ содержит все верные решения и посторонние корни, ОДЗ указана	– +	3
ОДЗ не найдена, ответ содержит посторонние корни	– *	1

Задание 6. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH , а на сторонах AB и BC выбраны точки M и N так, что прямые HM и HN симметричны друг другу относительно прямой BH . Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Найдите длину отрезка AK , если $AN=6$, $HC=9$.

Решение. Пусть M' и N' - проекции точек M и N на прямую AC , m , n , h и x - длины отрезков $M'H$, NN' , BH и NK соответственно. Тогда $M'K = x - m$, $N'K = x + n$, $MM' = km$, $NN' = kn$, где k - тангенс каждого из углов MHM' NNN' (равенство этих углов следует непосредственно из условия задачи).

В силу подобия треугольников MKM' и NKN' имеем равенство $\frac{x-m}{x+n} = \frac{km}{kn}$, откуда $x = \frac{2mn}{n-m}$. Пользуясь, далее тем, что треугольник AMM' подобен треугольнику ABH , а треугольник CNN' - треугольнику CBH , записываем равенства $\frac{6-m}{6} = \frac{km}{h}$ и $\frac{9-n}{9} = \frac{kn}{h}$; из них следует, что $\frac{mn}{n-m} = 18$. Поэтому $x = 2 \cdot 18 = 36$, $AK = 36 - 6 = 30$.

Ответ: 30.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена: получен верный ответ и приведено полное обоснование	++	14
Выписаны все необходимые соотношения, но верный ответ не получен/ Приведен верный ответ, но обоснование содержит пробелы	− +	6

Задание 7. Незвестный 100-значный код X составлен из цифр 1 и 2. Характеристикой произвольного 100-значного числа Y , также составленного из единиц и двоек, назовём количество разрядов, в которых цифры числа Y совпадают с цифрами кода. Докажите, что, узнав характеристики некоторых 80 чисел $Y_1, \dots, Y_{80}$, можно гарантированно определить X .

Решение. Опишем способ определения кода $X = \overline{x_1 \dots x_{100}}$, где $x_1, \dots, x_{100}$ - цифры. Для этого разобьём X на 20 частей по 5 цифр: $X_1 = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}$, $X_2 = \overline{x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}}$, ..., $X_{20} = \overline{x_{96} x_{97} x_{98} x_{99} x_{100}}$. Через p_i будем обозначать характеристику числа Y_i , $i=1, \dots, 80$. Положим $Y_1 = \underbrace{1 \dots 1}_{100}$. Тогда по характеристикам чисел Y_1 , $Y_2 = 22111 \underbrace{1 \dots 1}_{95}$, $Y_3 = 12211 \underbrace{1 \dots 1}_{95}$, $Y_4 = 11221 \underbrace{1 \dots 1}_{95}$ и $Y_5 = 12121 \underbrace{1 \dots 1}_{95}$ гарантированно определяется X_1 . В самом деле: если $p_k \neq p_1$ для какого-нибудь k от 2 до 4, то разность $p_k - p_1$ равна 2 или -2. В первом случае имеем равенства $x_{k-1} = x_k = 2$, во втором - $x_{k-1} = x_k = 1$; легко видеть, что в обоих случаях определяются и все остальные цифры, составляющие X_1 . Если же $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, то X_1 равно либо 12121, либо 12122, либо 21211, либо 21212. Первый из этих случаев имеет

место при $p_5 = p_1 + 2$, второй – при $p_5 = p_1 + 1$, третий – при $p_5 = p_1 - 2$, четвёртый – при $p_5 = p_1 - 3$.

Аналогично, по характеристикам чисел Y_1 , $Y_6 = \underbrace{1 \dots 1}_{5} 22111 \underbrace{1 \dots 1}_{90}$,
 $Y_7 = \underbrace{1 \dots 1}_{5} 12211 \underbrace{1 \dots 1}_{90}$, $Y_8 = \underbrace{1 \dots 1}_{5} 11221 \underbrace{1 \dots 1}_{90}$ и $Y_9 = \underbrace{1 \dots 1}_{5} 12121 \underbrace{1 \dots 1}_{90}$
определяем X_2 и так далее, до X_{19} . Заметим, что здесь уже будет известно количество единиц в X_{20} (поскольку будут известны число p_1 и цифры $x_1, \dots, x_{95}$), и для определения X_{20} окажется достаточным знание характеристик всего трёх чисел, например, $Y_{78} = \underbrace{1 \dots 1}_{95} 22111$, $Y_{79} = \underbrace{1 \dots 1}_{95} 21211$ и $Y_{80} = \underbrace{1 \dots 1}_{95} 21121$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	14

Задание 8. Отрезок длины d двигали так, что оба его конца перемещались только по параболе $y = x^2$, причём абсциссы соответствующих точек только возрастали. Весь отрезок первоначально находился в полуплоскости $x < 0$, а в итоге оказался в полуплоскости $x > 0$. Найдите все возможные значения d .

Решение. Пусть $P(p; p^2)$ и $Q(q; q^2)$ – концы отрезка, причём $p > q$, $PQ = d$. Обозначим через φ величину угла PQQ' , где Q' – проекция точки Q на ось абсцисс. Тогда $q - p = -d \sin \varphi$, $q^2 - p^2 = d \cos \varphi$, откуда $q = -\frac{ctg \varphi}{2} - \frac{d \sin \varphi}{2}$. Выясним, при каких d функция $q = q(\varphi)$ строго возрастает на интервале $(0; \pi)$.

Имеем $q'(\varphi) = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} - \frac{d \cos \varphi}{2}$. Неравенство $q'(\varphi) \geq 0$ преобразуется к виду $\sin^2 \varphi \cos \varphi \leq \frac{1}{d}$, а исследование функции $u(\varphi) = \sin^2 \varphi \cos \varphi$ показывает, что $u(\varphi) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$, причём равенство достигается только при $\varphi = \varphi_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, достаточным условием для указанного в задаче перемещения является неравенство $d \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Покажем, что если $d > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, то при движении отрезка из полуплоскости $x < 0$ в полуплоскость $x > 0$ обязательно есть момент, когда выполняется равенство $\varphi = \varphi_0$. В самом деле: при $p = 0$ имеем $q = -d \sin \varphi$, $q^2 = d \cos \varphi$ и, как следствие, соотношения $\cos \varphi = \frac{-1 + \sqrt{4d^2 + 1}}{2d} > 1 - \frac{1}{2d} > \cos \varphi_0$ и $\varphi < \varphi_0$. А при $p + q = 0$ имеем $\cos \varphi = 0$, то есть $\varphi = \frac{\pi}{2} > \varphi_0$. Ввиду непрерывности изменения величины φ и делаем вывод о существовании указанного момента.

Но $q'(\varphi_0) < 0$ и $q(\varphi)$ убывает в некоторой окрестности числа φ_0 . Поэтому движение отрезка не может удовлетворять всем заданным условиям.

Ответ: $(0; \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	16
Множество возможных значений параметра найдено и доказано, что все значения из этого множества удовлетворяют условиям задачи, но не доказано, что условиям задачи не удовлетворяют значения, не входящие в указанное множество.	+-	12
Имеется существенное продвижение в решении задачи (найденa функция одной переменной, описывающая движение отрезка)	-+	4