
Олимпиада 10 класс

Первый вариант

1. **(10 баллов)** Из города А в город Б, расстояние между которыми 100 км, в 9:00 вышли два автобуса, причем скорость одного из них в $17/12$ раза больше скорости другого. В то же время из города Б в город А выехал велосипедист. Первый автобус он встретил в 10:00, а второй – в 10:20. Найдите скорость велосипедиста, выразив её в км/ч.

2. **(10 баллов)** Существует ли выпуклый 73-угольник такой, что градусная мера каждого из его углов кратна пяти?

3. **(12 баллов)** Решите систему уравнений в натуральных числах:

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 3b + 3c. \end{cases}$$

4. **(12 баллов)** Является ли простым число $2...27999..9$? (сначала 2 написано 2024 раза, затем 9 написано 2024 раза).

5. **(12 баллов)** В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) оказалось, что $\angle BAD = \angle ADB = 40^\circ$ и $AB + CD = AD$. Найдите угол DAC .

6. **(14 баллов)** Сколько существует решений уравнения

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 1023$$

в целых числах? Напомним, что решения уравнения различны, если в них хотя бы у одной переменной отличаются значения.

7. **(14 баллов)** Пусть t – корень уравнения $x^3 - 3x - 4 = 0$. Докажите, что t больше, чем $\sqrt[5]{46}$.

8. **(16 баллов)** Заяц выписал все натуральные числа от 1 до 8100. Волк покрасил n чисел Зайца в красный цвет так, чтобы произведение любых двух различных красных чисел не было красным. При каком наибольшем n это возможно?

Олимпиада 10 класс

Второй вариант

1. (**10 баллов**) Из города А в город Б, расстояние между которыми 300 км, в 9:00 вышли два автобуса, причем скорость одного из них в $5/4$ раз больше скорости другого. В то же время из города Б в город А выехал велосипедист. Первый автобус он встретил в 12:20, а второй – в 13:00. Найдите скорость велосипедиста, выразив её в км/ч.

2. (**10 баллов**) Существует ли выпуклый 91-угольник такой, что градусная мера каждого из его углов кратна 4?

3. (**12 баллов**) Решите систему уравнений в натуральных числах:

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 4b + 4c. \end{cases}$$

4. (**12 баллов**) Является ли простым число $2 \dots 234 \dots 4$? (сначала 2 написано 2024 раза, затем 4 написано 2024 раза).

5. (**12 баллов**) В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) оказалось, что $\angle DAC = 10^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$ и $AB + CD = AD$. Найдите угол ADB .

6. (**14 баллов**) Сколько существует решений уравнения

$$abc + 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4b + 4c = 504$$

в целых числах?

7. (**14 баллов**) Пусть t – корень уравнения $x^3 - 3x - 3 = 0$. Докажите, что t больше, чем $\sqrt[5]{39}$.

8. (**16 баллов**) Заяц выписал все натуральные числа от 1 до 8100. Волк покрасил n чисел Зайца в красный цвет так, чтобы произведение любых двух различных красных чисел не было красным. При каком наибольшем n это возможно?