

Олимпиада 11 класс

Вариант 1

1. **(10 баллов)** Пачка офисной бумаги в интернет-магазине стоит 630 руб., а при оплате за 15 или более пачек предусмотрен кешбэк в размере 10% от внесённой суммы. Как, имея изначально 20000 руб., приобрести максимально возможное количество таких пачек? Определите это количество.
2. **(10 баллов)** Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{\lg(x^2 - 1)}}$.
3. **(12 баллов)** Найдите все квадратные трёхчлены, максимальные значения каждого из которых на отрезках $[0; 1]$, $[1; 2]$ и $[2; 3]$ равны 3, 6 и 8 соответственно.
4. **(12 баллов)** Все вершины тетраэдра $ABCD$ равноудалены от точки O . Зная, что $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $AC = BD = c$, найдите радиус сферы, проходящей через O и через середины рёбер AB , BC и AC .
5. **(12 баллов)** Решите уравнение $3^{-\frac{1}{2}} + 6^{-\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{-\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.
6. **(14 баллов)** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC = \angle CAD$ и $AB > AD$. Прямая, делящая его внешний угол при вершине A пополам, пересекает прямые BC , CD и BD в точках P , Q и R соответственно. Найдите длину отрезка AP , если $AQ = 3$, $AR = 18$.
7. **(14 баллов)** Неизвестный 100-значный код составлен из цифр 1 и 2. За один шаг про любое натуральное число можно узнать, является ли оно фрагментом кода. (Фрагмент числа N — это любое число, образованное подряд идущими цифрами в записи N ; например, $N = 1211$ имеет ровно восемь различных фрагментов: 1, 2, 12, 21, 11, 121, 211 и 1211.) Докажите, что за 120 шагов можно наверняка узнать этот код.
8. **(16 баллов)** Отрезок длины 1 двигали так, что оба его конца перемещались только по параболе $y = ax^2$, причём абсциссы соответствующих точек только возрастали. Весь отрезок первоначально находился в полуплоскости $x < 0$, а в итоге оказался в полуплоскости $x > 0$. Найдите все возможные положительные значения параметра a .

Олимпиада 11 класс

Вариант 2

1. **(10 баллов)** Набор пряжи в интернет-магазине стоит 620 руб., а при оплате за 20 или более наборов предусмотрен кешбэк в размере 15% от внесённой суммы. Как, имея изначально 30000 руб., приобрести максимально возможное количество таких наборов? Определите это количество.
2. **(10 баллов)** Найдите область определения функции $y = \lg \frac{3-2x-x^2}{1-x^2}$.
3. **(12 баллов)** Найдите все квадратные трёхчлены, минимальные значения каждого из которых на отрезках $[0; 1]$, $[1; 2]$ и $[2; 3]$ равны 3, 6 и 7 соответственно.
4. **(12 баллов)** Все вершины тетраэдра $ABCD$ равноудалены от точки O . Зная, что $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $AC = BD = c$, найдите радиус сферы, проходящей через O и через середины медиан треугольника ABC .
5. **(12 баллов)** Решите уравнение $2 - 6^{\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.
6. **(14 баллов)** В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH , а на сторонах AB и BC выбраны точки M и N так, что прямые HM и HN симметричны друг другу относительно прямой BH . Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Найдите длину отрезка AK , если $AH = 6$, $HC = 9$.
7. **(14 баллов)** Неизвестный 100-значный код X составлен из цифр 1 и 2. Характеристикой произвольного 100-значного числа Y , также составленного из единиц и двоек, назовём количество разрядов, в которых цифры числа Y совпадают с цифрами кода. Докажите, что, узнав характеристики некоторых фиксированных 80 чисел $Y_1, \dots, Y_{80}$, можно определить X .
8. **(16 баллов)** Отрезок длины d двигали так, что оба его конца перемещались только по параболе $y = x^2$, причём абсциссы соответствующих точек только возрастали. Весь отрезок первоначально находился в полуплоскости $x < 0$, а в итоге оказался в полуплоскости $x > 0$. Найдите все возможные значения d .