

Олимпиада 8-9 класс

Вариант 1

1. **(10 баллов).** Гриша записал по действительному числу в каждую клетку таблицы 10×10 . Оказалось, что сумма чисел в любых двух строчках больше 20. Обязательно ли найдётся столбец, в котором сумма чисел больше 10?
2. **(10 баллов).** Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых является полным кубом?
3. **(12 баллов).** На доске написаны все натуральные числа от 1 до 500. Сколькими способами можно выбрать три различных числа из написанных так, чтобы сумма любых двух из них делилась на 7?
4. **(12 баллов).** Сумма двух положительных чисел a, b равна 1. Докажите, что $\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{a^2+b} > 1$.
5. **(12 баллов).** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 22^\circ$ и $\angle CBD = 46^\circ$. На диагонали BD выбрана точка E так, что $BE = AD$. Из точки E опустили перпендикуляр EH на сторону AB . Докажите, что $AC > EH + CD$.
6. **(14 баллов).** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC провели биссектрису AD . Описанная окружность вокруг треугольника ABD пересекла сторону AC в точке E . Оказалось, что в четырёхугольник $ABDE$ можно вписать окружность. Найдите углы треугольника ABC .
7. **(14 баллов).** В секретном совете участвует 101 человек, некоторые из которых друг с другом знакомы. Известно, что если на секретное собрание придут любые 52 участника этого совета, то каждый из них будет знаком хотя бы с одним из остальных 51 пришедших. Докажите, что любые два участника либо знакомы, либо имеют общего знакомого.
8. **(16 баллов).** По кругу лежат 100 корзинок, в каждой из которых лежит хотя бы одна конфета, при этом общее количество конфет равно 1500. За один ход Петя может забрать себе все конфеты из 9 подряд идущих непустых корзинок, а Вася за один ход может взять все конфеты из одной непустой корзинки, у которой хотя бы одна из соседних корзинок пуста. Начинает Петя. Докажите, что Петя гарантированно сможет забрать хотя бы 1350 конфет при любом изначальном расположении конфет и любых действиях Васи.

Олимпиада 8-9 класс

Вариант 2

1. (10 баллов) Гриша записал по действительному числу в каждую клетку таблицы 12×12 . Оказалось, что сумма чисел в любых двух строчках больше 16. Обязательно ли найдётся столбец, в котором сумма чисел больше 8?
2. (10 баллов) Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых является удвоенным полным квадратом (числом вида $2n^2$, где n – некоторое натуральное число)?
3. (12 баллов) На доске написаны все натуральные числа от 1 до 1000. Сколькими способами можно выбрать три различных числа из написанных так, чтобы сумма любых двух из них делилась на 11?
4. (12 баллов) Сумма двух положительных чисел a , b равна 1. Докажите, что $\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} < 1$.
5. (12 баллов) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 28^\circ$ и $\angle CBD = 34^\circ$. На диагонали BD выбрана точка E так, что $BE = AD$. Из точки E опустили перпендикуляр EH на сторону AB . Докажите, что $AC > EH + CD$.
6. (14 баллов) Бильярдный шар вылетел из вершины B прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB , прилетел в середину катета AC , потом прилетел в точку на гипотенузе, отлетел и попал в вершину прямого угла. Найдите острые углы треугольника.
7. (14 баллов) В секретном совете участвует 83 человека, некоторые из которых друг с другом знакомы. Известно, что если на секретное собрание придут любые 43 участника этого совета, то каждый из них будет знаком хотя бы с одним из остальных 42 пришедших. Докажите, что любые два участника либо знакомы, либо имеют общего знакомого.
8. (16 баллов) По кругу лежат 200 корзинок, в каждой из которых лежит хотя бы одна конфета, при этом общее количество конфет равно 2000. За один ход Петя может забрать себе все конфеты из 4 подряд идущих непустых корзинок, а Вася за один ход может взять все конфеты из одной непустой корзинки, у которой хотя бы одна из соседних корзинок пуста. Начинает Петя. Докажите, что Петя гарантированно сможет забрать хотя бы 1600 конфет при любом изначальном расположении конфет и любых действиях Васи.