

Олимпиада 2026. Математика 11 класс

Вариант 1

Задача 1. (10 баллов) Известно, что для некоторого числа x числа $\frac{1}{\sin x}$ и $\frac{1}{\cos 2x}$ – целые. Найдите значение x .

Решение. Пусть $\frac{1}{\sin x} = n$, тогда $\frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 - 2} = 1 + \frac{2}{n^2 - 2}$.

Заметим, что так как второе число целое, то $n^2 - 2$ является делителем числа 2. n – целое число, не равное 0, значит из четырех делителей числа 2 ($\pm 1; \pm 2$) подходят только случаи $n^2 = 1$ и $n^2 = 4$.

В первом случае $\sin x = \pm 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$

Во втором случае $\sin x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $x = \pm \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $x = \pm \frac{5\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	10
Установлено, что $\frac{1}{\sin x}$ является делителем числа 2, но в записи решений допущены ошибки (например, выписаны не все решения), посторонних решений нет	+–	6
Решения с $\sin x = \pm 1$ и $\sin x = \pm \frac{1}{2}$ указаны, посторонних решений нет, но не доказано, что других решений нет	–+	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 2. (10 баллов) Для действительного числа $a > 1$ найдите все положительные корни уравнения $\log_{a+x-1} \frac{4}{x+1} = \log_a 2$.

Решение.

Заметим, что при положительных x основание логарифма левой части является положительным числом и под логарифмом стоит положительное число, то есть левая часть уравнения определена.

Перейдем в левой части к логарифму по основанию a :

$$\frac{\log_a \frac{4}{x+1}}{\log_a (a+x-1)} > \log_a 2$$

$$\log_a \left(\frac{4}{x+1} \right) = \log_a 2^{\log_a (a+x-1)}$$

$$\frac{4}{x+1} = 2^{\log_a(a+x-1)}$$

Заметим, что при положительных x в левой части стоит монотонно убывающая функция, а в правой части стоит монотонно возрастающая функция. Значит, у уравнения не более одного решения.

Заметим, что $x = 1$ является корнем уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	10
Решение уравнения найдено, но его единственность не доказана	—+	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	—	0

Задача 3. (12 баллов) Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle BCA = \angle ADC$, $AO = OC = 3$, $BO = 2 \cdot OD$. Найдите CD .

Решение. Положив $CD = x$, $AB = b$, $AD = d$, $\angle BAC = \alpha$, рассмотрим треугольник ACD . В нём $AC = AO + OC = 6$ и $x^2 = d^2 + 36 - 12d \cos \alpha$ (1) согласно теореме косинусов.

Значения b , d и $\cos \alpha$ можно найти из соотношений

$$b = 2d \quad (2)$$

$$bd = 36 \quad (3)$$

$$\frac{2bd}{b+d} \cos \alpha = 3. \quad (4)$$

Равенство (2) справедливо, поскольку AO – биссектриса в треугольнике ABD , следствием чего являются равенства $AB:AD = BO:OD = 2:1$. Равенство (3) вытекает из пропорции $AB:AC = AC:AD$, которая выполняется, поскольку, ввиду условий $\angle BAC = \angle DAC$ и $\angle BCA = \angle ADC$, треугольники ABC и ACD подобны. Наконец, равенство (4) – это формула для длины биссектрисы AO в треугольнике ABD .

Установив, что $b = 6\sqrt{2}$, $d = 3\sqrt{2}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{8}$, из (1) находим $x = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	12
Выписаны соотношения, из которых искомая длина может быть найдена.	+-	6
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	-	0

Задача 4. (12 баллов) При каких значениях параметра p уравнение $[x] \cdot \{x\} = p - x$ имеет ровно 2026 положительных корней? (Здесь $[x]$ – целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превышающее x , а $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x .)

Решение. Обозначив $[x]$ и $\{x\}$ через m и α соответственно, преобразуем равенство $\alpha m = p - m - \alpha$ к виду $(1 + \alpha)(m + 1) = p + 1$. А поскольку очевидно, что наличие положительных корней у исходного уравнения означает, что $p > 0$, то можно перейти к равенству

$$\frac{m+1}{p+1} = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Заметим, что $\frac{1}{2} < \frac{m+1}{p+1} \leq 1$. Следовательно, если рассматриваемое уравнение имеет ровно 2026 положительных корней, то целые части наибольшего и наименьшего из них равны $[p]$ и $[p] - 2025$ соответственно. При этом

$$[p] - 2025 = \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor \quad (*)$$

поскольку $\frac{\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor + 1}{p+1} > \frac{1}{2} \geq \frac{\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor}{p+1}$ для любого $p > 0$.

Положив теперь $\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor = n$, $\left\{ \frac{p+1}{2} \right\} = \beta$, разберём два случая.

- 1) $\beta < \frac{1}{2}$, откуда $[p] = [2n + 2\beta - 1] = 2n - 1$. Равенство (*), записанное в виде $2n - 2026 = n$, даёт $n = 2026$. Это значит, что $4051 \leq p < 4052$.
- 2) $\beta \geq \frac{1}{2}$, откуда $[p] = 2n$. Из (*) находим $n = 2025$. А тогда $4050 \leq p < 4051$.

В итоге установлено, что все искомые значения параметра p образуют полуинтервал $[4050; 4052)$.

Ответ: $4050 \leq p < 4052$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	12

Установлены границы корней, но решение содержит существенные пробелы	+ –	5
Установлена только одна из этих границ	– *	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 5. (12 баллов) На декартовой плоскости xOy дан график функции $y = \arctg x$. Масштабы на осях одинаковы, но не обозначены, асимптоты не проведены. Как с помощью циркуля и линейки провести асимптоты?

Решение. Укажем один из способов построения.

В верхней полуплоскости параллельно оси Ox проведём две пересекающие график прямые так, чтобы одна из них располагалась вдвое дальше от оси абсцисс, чем другая. Эти прямые будут иметь уравнения $y = t$ и $y = 2t$, где t – некоторое положительное число. Абсциссы точек их пересечения с графиком, равные tgt и $tg2t$ соответственно, окажутся связаны соотношением

$$tg\ 2t = \frac{2tg\ t}{1-tg^2\ t}. \text{ Далее } tg\ t \text{ будем обозначать через } s.$$

Выполним последовательно следующие стандартные операции:

- 1) построение отрезка длины $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{1-s^2} = \frac{s}{1-s^2}$;
- 2) построение отрезка длины $q = \sqrt{ps} = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$;
- 3) построение прямоугольного треугольника по катету длины q и опущенной на гипотенузу высоте длины s .

Длина другого катета в построенном треугольнике будет равна

$\frac{qs}{\sqrt{q^2-s^2}} = 1$. Дальнейшее ясно: проводим прямую $x = 1$, пересекающую график в точке $(1; \frac{\pi}{4})$, строим отрезок длины $\frac{\pi}{2}$ и, наконец, проводим прямые $y = \pm \frac{\pi}{2}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	12
Задача решена верно, хотя и без подробного описания стандартных построений	++	10
Построен набор отрезков, из которого стандартными построениями можно получить отрезок длины 1, но сами эти стандартные построения не перечислены	+ +	3

Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0
---	---	---

Задача 6. (14 баллов) Про возрастающую арифметическую прогрессию известно, что все её члены являются корнями уравнения $P(Q(x)) = 0$, где $P(x)$ – некоторый многочлен второй степени, а $Q(x)$ – некоторый многочлен третьей степени. Каким наибольшим может быть число членов такой прогрессии?

Решение. Прогрессия, о которой идёт речь в условии задачи, может быть четырёхчленной; например, числа $-1, 0, 1, 2$ удовлетворяют уравнению

$$P(Q(x)) = 0, \text{ где } P(x) = x^2 - 6x, (Q(x) = x^3 - x).$$

Предположим, что нашлись числа $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, образующие возрастающую арифметическую прогрессию и удовлетворяющие аналогичному уравнению. Ясно, что многочлен $P(x)$ имеет два различных корня $x_1 < x_2$, а все члены прогрессии входят в совокупность корней уравнений $Q(x) = x_1$ и $Q(x) = x_2$.

Пусть $Q(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$; можно считать, что $c_0 > 0$, а функция $f(x) = Q(x)$ имеет три промежутка монотонности: $(-\infty; q_1]$, $[q_1; q_2]$ и $[q_2; +\infty)$, где $q_1 < q_2$ – некоторые числа. Указанные полуинтервалы будут промежутками возрастания значений функции, а отрезок – промежутком убывания. Каждый из этих промежутков содержит не более двух членов рассматриваемой прогрессии (поскольку содержит не более чем по одному корню уравнений $Q(x) = x_1$ и $Q(x) = x_2$).

Допустим, что $a_1 < a_2 < q_1 < a_3 < a_4 < q_2 < a_5$. Тогда $Q(a_1) = Q(a_4) = x_1$, $Q(a_2) = Q(a_3) = x_2$. В силу теоремы Виета третий корень уравнения $Q(x) = x_1$ равен $-\frac{c_1}{c_0} - a_1 - a_4$, но это число совпадает (в силу равенства $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$) с числом $-\frac{c_1}{c_0} - a_2 - a_3$ – третьим корнем уравнения $Q(x) = x_2$. Противоречие.

Аналогично придём к противоречию и в случаях, когда

$a_1 < a_2 < q_1 < a_3 < q_2 < a_4 < a_5$ или $a_1 < q_1 < a_2 < a_3 < q_2 < a_4 < a_5$. Следовательно, пятичленной прогрессии с требуемыми свойствами не существует.

Ответ: 4.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	14

Дан пример 4-членной прогрессии и многочленов с требуемыми свойствами:	– +	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 7. (14 баллов) Для каких натуральных чисел n правильный тетраэдр можно разбить на три равных выпуклых n -гранника?

Решение. Для $n = 4$ и $n = 5$ приведём примеры соответствующих разбиений. В правильном тетраэдре $ABCD$ отметим точку O – центр его грани ABC , а также точки K , L и M – середины рёбер AB , BC и AC соответственно. Тогда тетраэдр $ABCD$ можно разбить как на тетраэдры $AOBD$, $BOCD$ и $AOCD$, так и четырёхугольные пирамиды $DAKOM$, $DBLOK$ и $DCMOL$.

Теперь докажем, что число n не может превышать 5. В самом деле, у многогранника разбиения любая не лежащая в плоскостях ABC , ABD , ACD и BCD грань, может быть только гранью, по которой этот n -гранник примыкает к одному из двух других. В силу выпуклости это означает

$$n \leq 4 + 2 = 6.$$

Предположим, что тетраэдр удалось разбить на равные выпуклые шестигранники P , Q и R . Каждый из них тогда имеет по одной грани на каждой из граней тетраэдра $ABCD$. При этом ни в одной из вершин A , B , C и D не может сходиться два или три шестигранника. Действительно, пусть, например, P и Q сходятся в вершине A , а плоскость, отделяющая P от Q , пересекает ребро BC и не содержит внутренних точек ребра BD . Тогда один из шестигранников отделён этой плоскостью от всей грани ABD и, следовательно, не может иметь там свою грань.

Итак, каждая вершина тетраэдра может принадлежать только одному из шестигранников. Поэтому есть шестигранник, содержащий две из них, а значит, и ребро тетраэдра. Но любой отрезок в тетраэдре, отличный от ребра, короче ребра, и потому шестигранник, содержащий менее двух вершин тетраэдра, не содержит отрезков соответствующей длины. Тем самым мы установили, что все три шестигранника не могут быть равны.

Ответ: $n = 4$ и $n = 5$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	14
Решение в целом верное, но есть недочёты в доказательстве неравенства $n < 6$	+ +	9-13
Приведены примеры и доказано, что $n \leq 6$	– +	6

Приведены только примеры	—*	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	—	0

Задача 8. (16 баллов) Пусть M – множество всех 256 четырёхзначных чисел, записываемых при помощи цифр 1, 2, 3 и 4. Диверсификатором назовём любое его подмножество D , обладающее следующим свойством: для любого числа $m \in M$ найдётся число $d(m) \in D$, такое, что m и $d(m)$ различаются во всех четырёх разрядах. Из какого наименьшего количества чисел может состоять диверсификатор?

Решение. Числа $d_1 = 1111$, $d_2 = 2222$, $d_3 = 3333$, $d_4 = 1234$, $d_5 = 2341$, $d_6 = 3412$ и $d_7 = 4123$ образуют диверсификатор. В самом деле, если число $m \in M$ не содержит единиц, двоек или троек, то оно отличается во всех разрядах от d_1 , d_2 или d_3 соответственно. Если же единица, двойка, тройка и, возможно, четвёрка в записи числа m присутствуют, то, как показывает небольшой перебор, m отличается во всех разрядах хотя бы от одного из чисел d_4, d_5, d_6, d_7 .

Докажем, что диверсификатор не может состоять из 6 чисел. Предположим, что нашлись числа $p = \overline{p_1 p_2 p_3 p_4}$, $q = \overline{q_1 q_2 q_3 q_4}$, $r = \overline{r_1 r_2 r_3 r_4}$, $u = \overline{u_1 u_2 u_3 u_4}$, $v = \overline{v_1 v_2 v_3 v_4}$, $w = \overline{w_1 w_2 w_3 w_4}$, образующие диверсификатор. Ни в каком разряде тогда нет трёх одинаковых цифр. (Действительно, в случае, например, равенств $p_1 = q_1 = r_1$ число $\overline{r_1 u_2 v_3 w_4}$ в каждом разряде совпадало бы с каким-то из чисел p, q, r, u, v, w). Отсюда следует, что для каждого разряда среди этих чисел можно выделить две пары так, что в этом разряде цифры чисел, входящих в пару, будут совпадать.

При этом среди выделенных $2 \cdot 4 = 8$ пар найдутся две непересекающиеся, относящиеся к разным разрядам. В самом деле, пусть в первом разряде выделены пары (p, q) и (r, u) . Тогда, если в какой-то паре для другого разряда появится число, отличное от p, q, r, u , например, выделенной окажется пара (p, v) , то вместе с парой (r, u) , выделенной для первого разряда, она и составит пару пар, обладающую указанным свойством. Если же чисел, отличных от p, q, r, u в выделенных парах не появится, то пары пар, выделенных для разрядов, могут быть только трёх видов: $((p, q), (r, u))$, $((p, r), (q, u))$ и $((p, u), (q, r))$. А поскольку разрядов четыре, то какая-то из этих трёх пар повторится. Можно считать, что во втором разряде выделены, как и в первом, пары (p, q) и (r, u) .

Но тогда из равенств $p_1 = q_1$ и $r_2 = u_2$ следует, что число $\overline{p_1 r_2 v_3 w_4}$ в каждом разряде совпадает хотя бы с одним из чисел p, q, r, u, v, w . Противоречие.

Ответ: 7.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	16
Доказано, что искомое количество больше 6	+–	11
Приведён пример диверсификатора из 7 чисел	–+	5
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Вариант 2

Задача 1. (10 баллов) Известно, что для некоторого числа x числа $\frac{1}{\cos x}$ и $\frac{1}{\cos 2x}$ – целые. Найдите значение x .

Решение. Пусть $\frac{1}{\cos x} = n$, тогда

$$\frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{2\cos^2 x - 1} = \frac{1}{\frac{2}{n^2} - 1} = \frac{n^2}{2 - n^2} = -\frac{n^2}{n^2 - 2} = -\frac{n^2 - 2 + 2}{n^2 - 2} = -1 + \frac{2}{n^2 - 2}.$$
 Заметим, что так как второе число целое, то $2 - n^2$ является делителем числа 2. n – целое число, не равное 0, значит из четырех делителей числа 2 ($\pm 1; \pm 2$) подходят только случаи $n^2 = 1$ и $n^2 = 4$.

В первом случае $\cos x = \pm 1$, откуда $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$

Во втором случае $\cos x = \pm \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ и $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi k$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ и $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	10
Установлено, что $\frac{1}{\sin x}$ является делителем числа 2, но в записи решений допущены ошибки (например, выписаны не все решения), посторонних решений нет	+–	6
Решения с $\cos x = \pm 1$ и $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ указаны, посторонних решений нет, но не доказано, что других решений нет	–+	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 2. (10 баллов) Для действительного числа $a > 1$ найдите все положительные корни уравнения $\log_{a+x-1} \frac{6}{x+1} = \log_a 3$.

Решение.

Заметим, что при положительных x основание логарифма левой части является положительным числом и под логарифмом стоит положительное число, то есть левая часть уравнения определена.

Перейдем в левой части к логарифму по основанию a :

$$\frac{\log_a \frac{6}{x+1}}{\log_a(a+x-1)} > \log_a 3$$
$$\log_a\left(\frac{6}{x+1}\right) = \log_a 3^{\log_a(a+x-1)}$$
$$\frac{6}{x+1} = 3^{\log_a(a+x-1)}$$

Заметим, что при положительных x в левой части стоит монотонно убывающая функция, а в правой части стоит монотонно возрастающая функция. Значит, у уравнения не более одного решения.

Заметим, что $x = 1$ является корнем уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	10
Решение уравнения найдено, но его единственность не доказана	—+	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	—	0

Задача 3. (12 баллов) Дан треугольник ABC , в котором $AB = 23$, $BC = 17$. Найдите AC , если известно, что на продолжении медианы CM за точку M существует точка P , для которой $\angle PBA = \angle ACB$ и $\angle APB = \angle ABC$.

Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $AP = p$, $AC = x$.

Из равенств $\angle PBA = \angle ACB$ и $\angle APB = \angle ABC$ следует, что треугольники подобны, причём $\angle PBA = \alpha$. Отрезок $AM = \frac{AB}{2} = \frac{23}{2}$ является, таким образом, биссектрисой в треугольнике PAC , и по известной формуле имеем:

$$\frac{23}{2} = \frac{2px}{p+x} \cos \alpha.$$

В силу указанного подобия справедливо также равенство $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AC}$, откуда $px = 23^2$.

Ещё одно соотношение даёт теорема косинусов, связывающая элементы треугольника ABC :

$$x^2 + 23^2 - 46x \cos \alpha = 17^2.$$

Из полученных уравнений находим $x = 7$.

Ответ: 7.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	12
Выписаны соотношения, из которых искомая длина может быть найдена.	+ –	6
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 4. (12 баллов) При каких значениях параметра q уравнение $[x] \cdot \{x\} = qx$ имеет ровно 2026 корней? (Здесь $[x]$ – целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превышающее x , а $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x .)

Решение. При $q = 0$ множество корней уравнения бесконечно (все целые числа), а при $q < 0$ корень ровно один ($x = 0$). Заметим также, что $x = 0$ удовлетворяет уравнению при любом значении q . Далее будем считать, что $q > 0$, $x \neq 0$.

Пусть $[x] = m$, $\{x\} = \alpha$. Уравнение примет вид $\alpha m = q(m + \alpha)$; при сделанных предположениях это означает, что $\alpha m = 0$ и выполняется равенство: $\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{m}$. (*)

Если $q \leq 1$, то существует бесконечно много целых положительных чисел m , для которых $\frac{1}{q} - \frac{1}{m} > 1$. Для каждого такого m число $x = m + \frac{1}{\frac{1}{q} - \frac{1}{m}}$ будет корнем рассматриваемого уравнения.

Если же $q > 1$, то из (*) видно, что $m < 0$, причём $\frac{1}{m} < \frac{1}{q} - 1$. А поскольку $\frac{1}{m-1} > \frac{1}{m}$ при $(m-1)m \neq 0$, то целыми частями 2025 ненулевых корней уравнения должны быть числа $-1, -2, -3, \dots, 2025$ и только они. Следовательно, нам нужно найти все числа q , удовлетворяющие неравенствам $-\frac{1}{2025} < \frac{1}{q} - 1 \leq -\frac{1}{2026}$. Искомые значения образуют полуинтервал $\left[\frac{2026}{2025}; \frac{2025}{2024}\right)$.

Ответ: $\frac{2026}{2025} \leq q < \frac{2025}{2024}$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	12
Установлены границы корней, но решение содержит существенные пробелы	+-	5
Установлена только одна из этих границ	-*	2
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	-	0

Задача 5. (12 баллов) На декартовой плоскости xOy дан график функции $y = \frac{1}{x}$. Масштабы на осях одинаковы, но не обозначены. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок длины 1?

Решение. Единичный отрезок можно получить способом, основанным на тождестве $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 4$. Выбрав на положительной ветви данной гиперболы произвольную точку $\left(a; \frac{1}{a}\right)$, последовательно сделаем следующие стандартные построения.

1. Строим отрезки длинами a и $\frac{1}{a}$.
2. Строим отрезки длинами $a + \frac{1}{a}$ и $\left|a - \frac{1}{a}\right|$.
3. Строим прямоугольный треугольник с гипотенузой длины $a + \frac{1}{a}$ и катетом длины $\left|a - \frac{1}{a}\right|$. По теореме Пифагора другой катет будет равен $\sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = 2$.
4. Отрезок длины 2 делим пополам.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	12
Задача решена верно, хотя и без детального описания стандартных построений	+	10
Построен набор отрезков, из которого стандартными построениями можно получить отрезок длины 1, но сами эти стандартные построения не указаны	-+	3
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	-	0

Задача 6. (14 баллов) Про возрастающую арифметическую прогрессию известно, что все её члены являются корнями уравнения $P(Q(x)) = 0$, где $P(x)$ – некоторый многочлен второй степени, а $Q(x)$ – некоторый многочлен четвёртой степени. Каким наибольшим может быть число членов такой прогрессии?

Решение. Прогрессия, о которой идёт речь в условии задачи, может быть шестичленной; например, числа $-5, -3, -1, 1, 3, 5$ удовлетворяют уравнению

$$P(Q(x)) = 0, \text{ где } P(x) = x^2 + 128x, (Q(x) = x^4 - 26x^2 + 25.$$

Предположим, что нашлась арифметическая прогрессия $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$, все члены которой являются корнями аналогичного уравнения. Ясно, что $P(x)$ должен иметь два различных корня $x_1 < x_2$, а все члены прогрессии – входить в совокупность корней уравнений $Q(x) = x_1$ и $Q(x) = x_2$. Пусть $Q(x) = c_0x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$; можно считать, что $c_0 > 0$, а функция $f(x) = Q(x)$ имеет четыре промежутка монотонности: $(-\infty; q_1]$, $[q_1; q_2]$, $[q_2; q_3]$ и $[q_3; +\infty)$, где $q_1 < q_2 < q_3$ – некоторые числа.. Каждый из этих промежутков содержит не более двух членов рассматриваемой прогрессии, поскольку содержит не более, чем по одному корню каждого из уравнений $Q(x) = x_1$ и $Q(x) = x_2$.

Пусть, для определённости, уравнению $Q(x) = x_1$ удовлетворяет три члена прогрессии, а уравнению $Q(x) = x_2$ – четыре, причём последнее не имеет корня на промежутке $[q_2; q_3]$. Так как $x_1 < x_2$ и $Q(x)$ в силу неравенства $c_0 > 0$ убывает на $(-\infty; q_1]$ и $[q_2; q_3]$ и возрастает на $[q_1; q_2]$ и $[q_3; +\infty)$, имеем равенства $Q(a_1) = Q(a_4) = Q(a_5) = Q(a_7) = x_2$ и $Q(a_2) = Q(a_3) = Q(a_6)$. Согласно теореме Виета тогда $a_1 + a_4 + a_5 + a_7 = -\frac{c_1}{c_0}$, и этому же числу равна сумма $a_2 + a_3 + a_6 + t$, где t – четвёртый корень многочлена $Q(x) - x_1$.

Но $a_1, \dots, a_7$ – прогрессия, а потому $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ и $a_5 + a_7 = 2a_6$. Отсюда $t = a_6$. Заметим теперь, что сумма квадратов корней многочлена $Q(x) = x_i$ не зависит от i . (В самом деле, из теоремы Виета следует, что каждая из этих сумм равна $\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 + 2\frac{c_2}{c_0}$). С другой стороны, $a_1^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_7^2 = a_1^2 + (a_1 + 3\alpha)^2 + (a_1 + 4\alpha)^2 + (a_1 + 6\alpha)^2 = 4a_1^2 + 26a_1\alpha + 61\alpha^2$, тогда как $a_2^2 + a_3^2 + 2a_6^2 = (a_1 + \alpha)^2 + (a_1 + 2\alpha)^2 + 2(a_1 + 5\alpha)^2 = 4a_1^2 + 26a_1\alpha + 55\alpha^2$. (Через α здесь обозначена разность прогрессии.) Видим, что равенство сумм квадратов корней возможно только при $\alpha = 0$, а это противоречит условию возрастания членов прогрессии.

Аналогично придём к противоречию и в других случаях распределения чисел $a_1, \dots, a_7$ по промежуткам монотонности функции $y = Q(x)$. Следовательно, семичленной прогрессии с требуемыми свойствами не существует.

Ответ: 6.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+	14
Дан пример 6-членной прогрессии и многочленов с требуемыми свойствами:	– +	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	–	0

Задача 7. (14 баллов) Для каких натуральных чисел n куб можно разбить на три равных выпуклых n -гранника?

Решение. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ можно разбить на три четырёхугольные пирамиды (например, $AA_1 B_1 C_1 D_1$, $ABB_1 C_1 C$ и $ACC_1 D_1 D$), так и на три параллелепипеда (очевидным образом). Чтобы показать разбиение на три семигранника, обозначим через K, L, M, N, P и Q середины рёбер $AA_1, A_1 D_1, C_1 D_1, C_1 C, BC$, и AB , а на отрезках $A_1 L$ и $C_1 M$ отметим точки L' и M' так, чтобы отрезки $L'M'$ и LM были параллельны. Тогда плоскости $KLMPNQ$ и $QL'M'P$ разрежут куб на три выпуклых семигранника.

На три тетраэдра куб разбить нельзя. В само деле, только на поверхности куба должно лежать не меньше, чем $6 \cdot 2 = 12$ граней тетраэдров, тогда как среди всех $3 \cdot 4 = 12$ их граней должны быть и такие, по которым тетраэдры примыкают друг к другу.

Предположив теперь, что куб разбит на три выпуклых n -гранника, докажем неравенство $n \leq 7$. Пусть $M(A)$ и $M(B)$ – два из этих n -гранников, причём $M(A)$ содержит вершину A , а $M(B)$ – вершину B . Плоскость, отделяющую $M(A)$ от $M(B)$, обозначим через π . Тогда, если прямая AB лежит в π , то либо $M(A)$ отделён этой плоскостью от грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, либо $M(B)$ – от грани $CC_1 D_1 D$. Если же π не содержит прямую AB , то либо $M(A)$ отделён этой плоскостью от грани $BB_1 C_1 C$, либо $M(B)$ – от грани $AA_1 D_1 D$.

Обязательно, таким образом, какой-то n -гранник отделён плоскостью π от какой-то грани куба и, в силу выпуклости, не может иметь на той грани свою грань. Но любая грань n -гранника должна либо лежать на одной из граней куба, либо быть одной из не более чем двух, по которым этот n -гранник граничит с другими. Поэтому $n \leq 6 - 1 + 2 = 7$.

Ответ: для $n = 5, 6, 7$.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	++	14

Решение в целом верное, но есть недочёты в доказательстве неравенства $n \leq 7$	+ -	9-13
Приведены примеры и доказано, что $n \geq 5$	— +	6
Приведены только примеры	—*	4
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	—	0

Задача 8. (16 баллов) Пусть M – множество всех четырёхзначных чисел, записываемых при помощи цифр 1, 2, 3. Диверсификатором назовём любое его подмножество D , обладающее следующим свойством: для любого числа $m \in M$ найдётся число $d(m) \in D$ такое, что m и $d(m)$ различаются во всех четырёх разрядах. Из какого наименьшего количества чисел может состоять диверсификатор?

Решение. Пусть имеется диверсификатор D , состоящий из n чисел. Составим число $m = \overline{c_1 c_2 c_3 c_4}$, $m \in M$, следующим образом. Цифру c_1 в его первый разряд возьмём такую, которая в первом разряде чисел D встречается не реже любой другой. В D будет не более $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ чисел, начинающихся с других цифр. Цифру c_2 выберем так, чтобы во втором разряде этих $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$ она встречалась не реже любой другой цифры. В D окажется не более $\left\lceil \frac{2}{3} \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil \right\rceil$ чисел, первая цифра каждого из которых отлична от c_1 , а вторая – от c_2 . Аналогично подберём c_3 и c_4 .

В итоге в диверсификаторе окажется не более $\left\lceil \frac{2}{3} \left\lceil \frac{2}{3} \left\lceil \frac{2}{3} \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil \right\rceil \right\rceil \right\rceil$ чисел d таких, что d и m различаются во всех разрядах. Следовательно, выполняется неравенство $\left\lceil \frac{2}{3} \left\lceil \frac{2}{3} \left\lceil \frac{2}{3} \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil \right\rceil \right\rceil \right\rceil \geq 1$, откуда $n \geq 8$. Итак, D должен содержать не менее 8 чисел.

С другой стороны, можно пример диверсификатора из 8 чисел: (1123, 1232, 1331, 2211, 2312, 3133, 3222, 3321).

Ответ: 8.

Критерии оценивания решений

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Задача полностью решена	+ +	16
Приведён пример диверсификатора из 8 чисел	+ —	11
Доказано, что искомое количество больше 7	— +	5
Решение содержит существенные ошибки, не приведено или не завершено	—	0