

Вариант 1

Задача 1. (10 баллов) Известно, что для некоторого числа x числа $\frac{1}{\sin x}$ и $\frac{1}{\cos 2x}$ – целые. Найдите значение x .

Задача 2. (10 баллов) Для действительного числа $a > 1$ найдите все положительные корни уравнения $\log_{a+x-1} \frac{4}{x+1} = \log_a 2$.

Задача 3. (12 баллов) Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle BCA = \angle ADC$, $AO = OC = 3$, $BO = 2 \cdot OD$. Найдите CD .

Задача 4. (12 баллов) При каких значениях параметра p уравнение $[x] \cdot \{x\} = p - x$ имеет ровно 2026 положительных корней? (Здесь $[x]$ – целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превышающее x , $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x .)

Задача 5. (12 баллов) На декартовой плоскости xOy дан график функции $y = \arctg x$. Масштабы на осях одинаковы, но не обозначены, асимптоты не проведены. Как с помощью циркуля и линейки провести асимптоты?

Задача 6. (14 баллов) Про возрастающую арифметическую прогрессию известно, что все её члены являются корнями уравнения $P(Q(x)) = 0$, где $P(x)$ – некоторый многочлен второй степени, а $Q(x)$ – некоторый многочлен третьей степени. Каким наибольшим может быть число членов такой прогрессии?

Задача 7. (14 баллов) Для каких натуральных чисел n правильный тетраэдр можно разбить на три равных выпуклых n -гранника?

Задача 8. (16 баллов) Пусть M – множество всех 256 четырёхзначных чисел, записываемых при помощи цифр 1, 2, 3 и 4. Диверсификатором назовём любое его подмножество D , обладающее следующим свойством: для любого числа $t \in M$ найдётся число $d(t) \in D$, такое, что t и $d(t)$ различаются во всех четырёх разрядах. Из какого наименьшего количества чисел может состоять диверсификатор?

Вариант 2

Задача 1. (10 баллов) Известно, что для некоторого числа x числа $\frac{1}{\cos x}$ и $\frac{1}{\cos 2x}$ – целые. Найдите значение x .

Задача 2. (10 баллов) Для действительного числа $a > 1$ найдите все положительные корни уравнения $\log_{a+x-1} \frac{6}{x+1} = \log_a 3$.

Задача 3. (12 баллов) Дан треугольник ABC , в котором $AB = 23$, $BC = 17$. Найдите AC , если известно, что на продолжении медианы CM за точку M существует точка P , для которой $\angle PBA = \angle ACB$ и $\angle APB = \angle ABC$.

Задача 4. (12 баллов) При каких значениях параметра q уравнение $[x] \cdot \{x\} = qx$ имеет ровно 2026 корней? (Здесь $[x]$ – целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превышающее x , а $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x .)

Задача 5. (12 баллов) На декартовой плоскости xOy дан график функции $y = \frac{1}{x}$. Масштабы на осях одинаковы, но не обозначены. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок длины 1?

Задача 6. (14 баллов) Про возрастающую арифметическую прогрессию известно, что все её члены являются корнями уравнения $P(Q(x)) = 0$, где $P(x)$ – некоторый многочлен второй степени, а $Q(x)$ – некоторый многочлен четвёртой степени. Каким наибольшим может быть число членов такой прогрессии?

Задача 7. (14 баллов) Для каких натуральных чисел n куб можно разбить на три равных выпуклых n -гранника?

Задача 8. (16 баллов) Пусть M – множество всех четырёхзначных чисел, записываемых при помощи цифр 1, 2, 3. Диверсификатором назовём любое его подмножество D , обладающее следующим свойством: для любого числа $m \in M$ найдётся число $d(m) \in D$ такое, что m и $d(m)$ различаются во всех четырёх разрядах. Из какого наименьшего количества чисел может состоять диверсификатор?