

Открытая олимпиада школьников (информатика) 2024-25

Решения заданий заключительного этапа для 5-8 класса (типовой вариант)

1. Кодирование информации, кодирование звуковой информации (1 балл)

[Тяжело записывать оркестр]

Мила играет в духовом оркестре. Оркестр записал выступление, создав отдельные аудиозаписи для каждого инструмента. Чтобы прослушать композицию в исполнении всего оркестра, нужно запустить все аудиофайлы одновременно через аудиоредактор (записи всех инструментов имеют одинаковую продолжительность).

Мила хочет отправить запись выступления подруге в социальной сети, однако выяснилось, что в этой социальной сети нельзя отправить набор файлов, общий информационный объем которых превышает 2 Гб.

Мила решила уменьшить число звуковых файлов. С помощью аудиоредактора она может превратить два одноканальных аудиофайла в один одноканальный, в котором звучание инструментов исходных файлов просто наложится друг на друга. Все характеристики выходного файла (такие как частота, длительность, глубина кодирования) совпадают с соответствующими характеристиками исходных файлов. Сразу после выполнения этого действия исходные два файла заменяются одним, полученным в результате выполнения этой операции.

Какое минимальное количество объединений потребуется сделать Миле, чтобы она смогла отправить получившийся набор файлов в социальной сети, если в ее оркестре 55 музыкантов, каждый инструмент записан в одноканальном режиме при частоте 40кГц и глубине кодирования 16 бит, а композиция длится 8 минут 32 секунды?

В ответ запишите одно целое число – минимальное количество операций объединения.

Ответ: 3

Решение:

Подсчитаем информационный объем записи одного инструмента.

Применим формулу $I = D \cdot t \cdot i \cdot k$.

$I = 40\,000 \text{ (Гц)} \cdot 512 \text{ (секунд)} \cdot 16 \text{ (бит)} \cdot 1 \text{ (число каналов)} = 327\,680\,000 \text{ (бит)} = 40\,000 \text{ Кб}$

Рассчитаем информационный объем 55 таких аудио файлов: $40\,000 \cdot 55 = 2\,200\,000 \text{ Кб}$

Рассчитаем, сколько Кб может занять набор файлов, допустимый для передачи в социальной сети.

$2 \cdot 1024 \cdot 1024 = 2\,097\,152 \text{ Кб}$

Заметим, что одна операция объединения удаляет ровно один файл из исходного набора файлов. Это значит, что каждая операция объединения уменьшает общий информационный объем на 40 000 Кб.

Теперь составим уравнение, где x – искомое число операций объединения.

$2\,200\,000 - 40\,000 \cdot x < 2\,097\,152$

Найдем минимальный x , удовлетворяющий условию – это 3.

2. Алгоритмизация и программирование (2 балла)

[Закон Амдала]

Выполнение программы можно ускорить, если выполнять разные части программы параллельно на разных ядрах компьютера. Обозначим как ускорение S показатель того, во сколько раз программа выполняется быстрее при параллельном вычислении на нескольких ядрах по сравнению с последовательным (одноядерным) выполнением. Максимальное ускорение, которое можно получить, распараллелив вычисления наиболее эффективно, выражается в законе Амдала:

$S = 1 / ((1 - P) + (P/N))$, где:

P – это величина, рассчитываемая из выражения $1 - Q = P$, где Q – это отношение доли кода, который нельзя выполнять одновременно с каким-либо другим кодом этой программы, ко всему коду программы.

N – число ядер, которые могут быть задействованы для выполнения программы.

Король волшебного королевства "Информат", где магические заклинания записываются как программы, пригласил талантливого инженера Виктора, чтобы модернизировать свой одноядерный компьютер.

Виктор выяснил, что 80% всех магических заклинаний, выполняемых королем, могут выполняться параллельно на нескольких ядрах. Оставшиеся 20% заклинаний не могут выполняться одновременно ни между собой, ни вместе с другими заклинаниями, так как это приведет к побочным эффектам.

Виктор предложил добавить в компьютер 4 новых ядра и настроить работу устройства так, чтобы на новых ядрах выполнялись только заклинания, которые могут выполняться параллельно друг другу, а на исходном ядре – только заклинания, которые нельзя выполнять одновременно с чем-либо (которые выполняются тогда и только тогда, когда ни на каком из других ядер не выполняются никакие заклинания).

Король задался вопросом: во сколько раз быстрее будет работать королевский компьютер после модернизации? Помогите королю найти ответ.

Ответ округлите до 1 знака после запятой, в качестве разделителя используйте запятую. Например, если компьютер станет работать в 1,1 раз быстрее, то в ответ следует указать "1,1".

Ответ: 2,5

Решение:

Доля кода, которую можно распараллелить:

$P = 0,8$

Следовательно доля кода, которая выполняется последовательно:

$1 - P = 0,2$

У нас появляется 4 новых ядра для параллельной части. При этом последовательная часть выполняется только тогда, когда никакие параллельные задачи не выполняются, а параллельная часть распределяется равномерно между 4 ядрами.

Red	White	White	White
Red	Red	Red	Red

Скорость исполнения параллельной части выполняется на 4 ядрах, поэтому затраченное время сокращается в 4 раза $0,8 / 4 = 0,2$ (P/N)

Оба варианта подходят, но по условию нам нужно записать минимальное значение из всех возможных.

Ответ: 32768

Решение:

Заметим, что формула, по которой вычисляется переменная R равносильна Искключающему ИЛИ. Из этого можно сделать вывод, что логический преобразователь будет возвращать ИСТИНУ только в том случае, если переданная на вход функция возвращается ИСТИНУ либо на наборе из нулей, либо на наборе из единиц. Если же функция, переданная на вход, на обоих рассматриваемых наборах возвращает ЛОЖЬ или на обоих рассматриваемых наборах возвращает ИСТИНУ – то логический преобразователь вернет нам ЛОЖЬ.

Всего функций от 4 переменных: $2^{(2^4)} = 2^{16}$. Из них функций, возвращающих ИСТИНУ на нулевом наборе: 2^{15} . По условию задачи, на наборе из единиц такие функции должны возвращать ЛОЖЬ. Следовательно, всего таких функций будет 2^{14} .

Аналогично рассматриваем случай для функций, которые на нулевом наборе возвращают ЛОЖЬ. Таких тоже будет 2^{14} . Тогда всего подходящих нам функций $2 * 2^{14} = 2^{15} = 32768$

5. Основы комбинаторики (1 балл)**[По ЕГЭ, так по ЕГЭ]**

Александр Санечкин, так и не выиграв олимпиаду, решил сдавать ЕГЭ. На экзамене ему предложено 11 вопросов, каждый с четырьмя вариантами ответа: А, В, С и D. Александр считает, что вариант В зачастую оказывается правильным, поэтому он решил действовать по следующему плану:

Александр поставит ответ В ровно в 5 вопросах, при этом никакие два вопроса с ответом В не должны идти подряд (то есть между любыми двумя вопросами с ответом В должен быть хотя бы один вопрос с другим ответом).

В остальных 6 вопросах он будет выбирать ответы только из вариантов А, С или D, и при этом решил, что все три этих варианта должны встречаться хотя бы один раз.

Сколько существует способов заполнить бланк ответов, удовлетворив всем условиям его плана?

Ответ: 11340

Решение:

Для начала выпишем все условия, о которых говорится в задаче:

1. Ровно 5 ответов должны быть вариантом В
2. Никакие два ответа В не идут подряд, то есть между любыми двумя В должен стоять хотя бы одна "не В"
3. Все ответы "не В" Александр выбирает из трёх вариантов (А, С, D), но есть условие, что каждый из вариантов должен встретиться хотя бы один раз.

Посчитаем сколько есть способов расставить 5 букв В на 11 позиций, чтобы две В не шли подряд:

Чтобы было удобнее будем расставлять 6 "не В", они создают 7 промежутков, где могут стоять В.

Выбираем из 7 промежутков 5:

$$\binom{7}{5} = 21$$

Получается, что у нас есть 21 способ расставить 5 букв В так, чтобы никакие две не шли подряд.

Теперь расставляем остальные варианты ответов:

Всего способов расставить А, С и D на 6 позиций равняется $3^6 = 729$

Вычитаем случаи, где не появляется любой из вариантов ответа:

А:

$$2^6 = 64$$

С:

$$2^6 = 64$$

D:

$$2^6 = 64$$

Теперь нам нужно вернуть случаи, когда не появляется сразу два ответа (к примеру, ни А, ни С), следовательно их нужно вернуть:

А, С:

$$1^6 = 1 \text{ способ}$$

А, D:

$$1^6 = 1 \text{ способ}$$

С, D:

$$1^6 = 1 \text{ способ}$$

Общее число расстановок ответов А, С, D:

$$3^6 - 3 * 2^6 + 3 = 729 - 192 + 3 = 540$$

Умножаем количество способов расстановки А, С, D, на количество способов расстановки В:

$$21 * 540 = 11340$$

6. Информационное моделирование. Моделирование на строке (3 балла)

[Смещения]

Андрей придумал свой собственный способ шифрования слов. Шифрование состоит из двух этапов, в каждом из которых над всеми буквами производился ряд смещений их на некоторое число.

Операция смещения буквы на число X подразумевает замену этой буквы на букву, находящуюся на X позиций правее в русском алфавите. Например, смещение буквы 'А' на 5 даёт букву 'Е'. Алфавит считается зацикленным, т. е. после буквы 'Я' идут снова 'А', 'Б', 'В' и так далее. Таким образом смещение 'Я' на 5 даёт букву 'Д'.

На первом этапе для шифрования придумывается первое кодовое слово. В нём считается количество согласных и гласных букв (Ь и Ъ в данной задаче относить к согласным). Все согласные буквы слова, которое надо зашифровать, смещаются на число, равное количеству гласных букв в первом кодовом слове. Все гласные буквы слова, которое надо зашифровать, смещаются на число, равное количеству согласных букв в первом кодовом слове. Например, если кодовое слово — КОТ, то после шифрования слова ГУСЕНИЦА с помощью данного кодового слова получим ДХТЖОКЧВ.

На втором этапе придумывается второе кодовое слово. И получившееся после первого этапа слово (далее называется исходным для второго этапа) кодируется с его помощью. Каждая буква смещается на число, равное позиции определённой буквы (назовём её буквой смещения) в алфавите (алфавит пронумерован с единицы). Буква смещения определяется следующим образом: определяется позиция буквы, которую мы хотим зашифровать в исходном слове (нумерация идёт с единицы); далее это число делится на число букв во втором кодовом слове и берётся остаток от деления. Определяется буква, стоящая во втором кодовом слове на позиции, равной найденному остатку от деления. Эта буква и будет буквой смещения для той буквы, которую мы хотим зашифровать.

Например, с помощью второго кодового слова МАГ полученное после первого этапа шифрования слова ГУСЕНИЦА слово ДХТЖОКЧВ шифруется следующим образом:

1) Определяются буквы смещения для каждой из букв слова ДХТЖОКЧВ. Полученные буквы смещения по порядку: МАГМАГМА. Позиции букв в алфавите: М-14, А-1, Г-4.

2) Зашифрованное слово выглядит так: СЦЦФПОЕГ.

Помогите Андрею зашифровать слово МАРМЕЛАД, если первое кодовое слово - ПОЛИГОН, а второе – ДРУЗЬЯ.

Примечание: Алфавит: АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ

Ответ: ФХЗШЁОИШ

Решение:

Сперва выполним первый этап шифрования с использованием первого кодового слова ПОЛИГОН. В слове полигон содержится 4 согласные буквы и 3 гласные. Все гласные исходного слова будут смещены на 4 буквы, все согласные – на 3.

М смещается на 3 буквы, получаем П.

А смещается на 4 буквы, получаем Д.

Аналогичным образом смещаем остальные буквы и получаем зашифрованное после первого этапа слово ПДУПИОДЖ.

Далее выполним второй этап шифрования с использованием второго кодового слова – ДРУЗЬЯ. Буквами смещения для каждой из букв зашифрованного на первом этапе слова по порядку будут являться буквы ДРУЗЬЯДР.

Буква Д имеет порядковый номер 5 в алфавите, значит первая буква П будет смещена на пять позиций, получаем Ф.

Буква Р имеет порядковый номер 18 в алфавите, значит вторая буква Д будет смещена на 18 позиций, получаем Х.

Аналогично зашифровываем остальные буквы слова и получаем слово ФХЗШЁОИШ.

7. Информационное моделирование. Теория игр (3 балла)

[Магические камни]

Имеется 10 пронумерованных магических камней, разложенных по окружности в следующем порядке (по часовой стрелке):

7, 2, 9, 5, 1, 10, 4, 8, 6, 3

При том между камнями 3 и 7 есть пустое пространство.

Два игрока (Р1 и Р2) ходят по очереди.

Камень считается «доступным», если он непосредственно граничит с пустым местом.

В каждый ход игрок забирает один «доступный» камень и добавляет его значение к своему личному счёту.

Когда камень убирают, на его месте образуется ещё одно пустое место, и соседние камни (если они не были «доступны») могут стать доступными в будущих ходах.

Игра длится, пока все камни не будут взяты. Побеждает игрок с большей итоговой суммой.

Какое максимальное количество очков может получить к концу игры игрок, который может победить независимо от ходов оппонента, если во время игры он (игрок, который победит в этой игре) будет придерживаться своей выигрышной стратегии? Если выигрышных стратегий несколько, игрок выберет ту, при которой наименьшая итоговая сумма, которую он может получить в зависимости от действий оппонента – максимальна среди других стратегий.

Ответ: 32

Решение:

Общая сумма камней равна:

$$7 + 2 + 9 + 5 + 1 + 10 + 4 + 8 + 6 + 3 = 55$$

Представим, что мы хотим узнать, сколько баллов может получить игрок, если у него остался какой-то отрезок (последовательность) камней.

Пусть "показатель" — это значение разницы между камнями первого и второго игрока.

Рассмотрим ситуации, когда остался 1 камень, 2 камня, 3 камня и т.д.

Если остаётся один камень (например, только камень с числом 7), то игрок просто его берёт – его "показатель" равен значению камня (7).

Если остаётся два камня (например, 7 и 2), игрок может выбрать либо левый, либо правый. Но надо учесть, что после его хода противник возьмёт оставшийся камень. Поэтому игрок выбирает вариант, при котором разница (его баллы минус баллы противника) будет больше.

В случае камней 7 и 2:

Если мы возьмём камень 2, то его "показатель" будет $2-7 = -5$, а если камень 7, то $7-2 = 5$

Таким образом, мы идём «назад»: начинаем с самого простого случая (один камень) и уже зная результаты для 1 и 2 камней, можем определить результат для 3 камней, потом для 4 и так далее.

Построим таблицу 10x10:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7	5	4	9	4	6	4	4	2	9
2		2	7	-2	3	7	3	5	5	-2
3			9	4	5	5	-1	11	-3	14
4				5	4	6	10	-2	12	-5
5					1	9	-5	13	-7	10
6						10	6	6	8	9
7							4	4	2	1
8								8	2	5
9									6	3
10										3

Номера столбцов и строк – это номера позиций, на которых лежит камень. В каждой i,j -ой ячейке таблицы записан показатель для соответствующего отрезка с i по j .

Жёлтым цветом обозначены ячейки, которые отвечают за отрезок длины 1, зеленым – отрезки длины 2, бирюзовым – отрезки длины 3 и т.д.

На диагонали выписываем только само значение камня, потому что это случай, когда камень один и мы просто берём его.

Отрезки из двух камней:

Например, для камней 1 и 2 (7 и 2):

Если взять 7, противник получит 2, разница = $7-2 = 5$

Если взять 2, противник получит 7, разница = $2-7 = -5$

Выбираем максимум: результат равен 5. Записываем это в таблице для отрезка от 1 до 2.

Отрезки из трёх камней и больше:

Возьмем, например, отрезок с 1 по 3 (7, 2, 9).

Вариант А: игрок берёт 7. Тогда остаётся отрезок (2,9), для которого мы уже вычислили результат (пусть он равен X). Тогда итог будет $7-X$.

Вариант В: игрок берёт 9. Тогда остаётся отрезок (7,2), для которого результат равен 5 (как мы посчитали выше), и итог будет $9-5 = 4$.

Сравним варианты: если $7-X$ получается больше 4, выбираем первый вариант; иначе – второй. Записываем итоговую разницу для отрезка (1,3).

Продолжаем так делать для 4, 5, ..., 10 камней в отрезке

Если всё делать аккуратно, в ячейке для всего ряда (от 1 до 10) получим число 9 (разница между первым и вторым игроком)

Вычислим ответ:

Разница между баллами первого и второго игрока равна 9.

Общая сумма камней равна 55.

Получим систему уравнений:

$$P1 + P2 = 55$$

$$P1 - P2 = 9$$

После решения системы уравнений получим ответ:

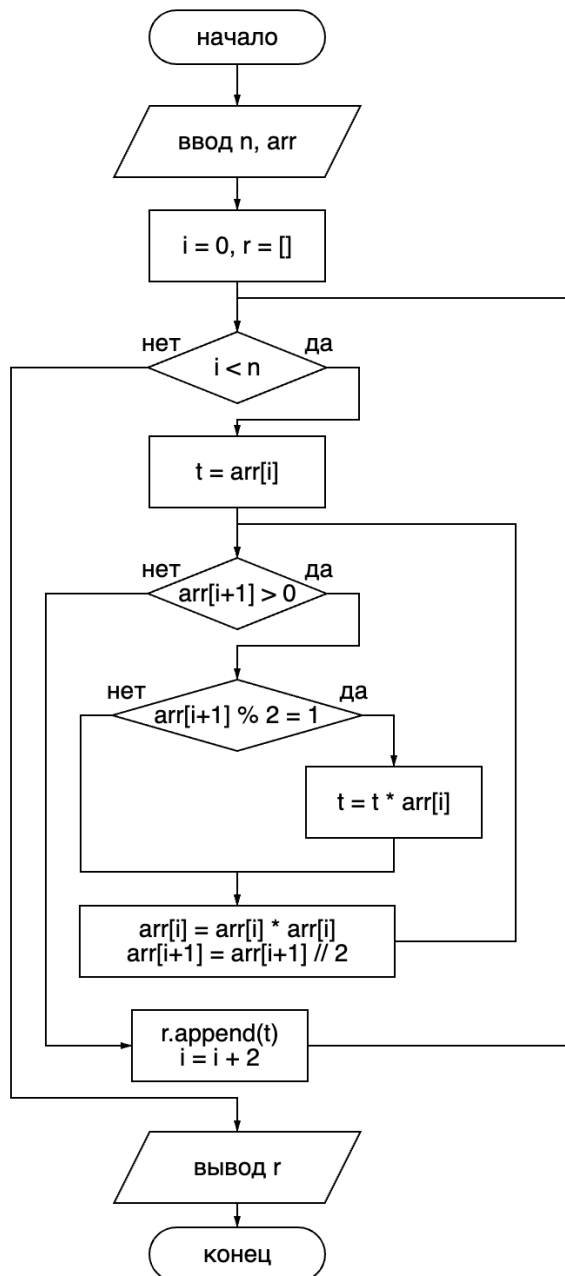
$$P1 = 32$$

$$P2 = 23$$

В ответ было необходимо указать значение $\max(P1, P2) = 32$.

8. Алгоритмизация и программирование. Исполнение алгоритма, заданного в виде блок-схемы (3 балла)
[Матроскин и блок схема]

Коту Матроскину дали блок-схему алгоритма, который получает на вход: число n – число элементов в массиве arr и сам массив arr . Элементы в массиве нумеруются с нуля. Все элементы массива arr – целые положительные числа.



Помогите узнать, какие n и arr Матроскин подал на вход данному алгоритму, если на выходе получил массив $r = [4913, 1953125, 177147, 131072, 100000, 40353607]$. В ответ запишите без пробелов элементы исходного массива arr по порядку.

Примечание:

$a // b$ – целочисленное деление числа a на число b .

$a \% b$ – остаток от деления числа a на число b .

$a.append(b)$ – добавление в конец массива a числа b .

Ответ: 1725831021610478

Решение:

Проанализируем представленный алгоритм. На вход мы получаем какой-то массив. Потом с помощью индекса i начинаем его обход. В переменную t мы кладем наш текущий элемент. Затем мы видим блок, который описывает быстрое возведение в степень, причем в нашем случае, значением степени будет число $a[i+1]$, то есть следующее в массиве за тем, которое мы сейчас рассматриваем. Значение, которое мы будем возводить в степень – $a[i]$, а результат будет как раз лежать в переменной t . Но также заметим, что изначально в переменную t положили значение $a[i]$, следовательно можно сделать вывод, что мы возводим наше число $a[i]$ в степень $a[i+1]+1$. Далее мы добавление результат возведения в степень в массив и увеличиваем индекс на два. Получается мы последовательно проходимся по парам чисел исходного массива и возводим первое число в степень, равную второму числу, увеличенному на один. Тогда проанализируем наш выходной массив $[4913, 1953125, 177147, 131072, 100000, 40353607]$. Либо программно, либо аналитически вычисляем, какой степенью какого числа являются наши значения:

$4913 = 17^3$, $1953125 = 5^9$, $177147 = 3^{11}$, $131072 = 2^{17}$, $100000 = 10^5$, $40353607 = 7^9$. Следовательно наш исходный массив:
[17, 2, 5, 8, 3, 10, 2, 16, 10, 4, 7, 8]

9. Кодирование информации. Системы счисления. (1 балл)

[Пиксельное кодирование]

Илья придумал свой собственный способ кодирования слов с помощью трёхцветных пиксельных изображений.

Илья решил, что каждый горизонтальный ряд пикселей изображения будет представлять собой двоичное число. Двоичное число считывается с картинки посимвольно, пиксель за пикселем, по следующему правилу:

Красный (R) пиксель преобразуется в 0,
Зелёный (G) пиксель преобразуется в 1,
Синий (B) пиксель игнорируется (пропускается).

Для декодирования зашифрованного сообщения необходимо:

- 1) все двоичные числа, зашифрованные в рядах пикселей, поочередно перевести в десятичную систему счисления;
- 2) каждое число заменить на остаток от деления этого числа на 33;
- 3) каждое число интерпретировать как код буквы с помощью таблицы:

13	А	7	К	11	Ч
0	Б	31	Л	6	Ц
9	В	14	М	10	Ш
25	Г	15	Н	24	С
2	Д	1	О	30	Щ
16	Е	8	П	22	Ъ
21	Ё	23	Р	27	Ы
29	Ж	5	С	3	Ь
17	З	32	Т	28	Э
18	И	12	У	20	Ю
4	Й	26	Ф	19	Я

После выполнения всех описанных действий должна получиться последовательность из букв, которая представляет собой расшифрованное сообщение.

Зашифрованное сообщение имеет следующий вид:

R	R	G	B	G	R	G
B	R	G	G	B	G	R
G	B	B	G	B	G	G
G	R	B	R	B	R	R
R	G	R	B	R	R	G
G	R	B	R	B	G	R
B	G	R	R	G	G	B

Помогите Илье расшифровать сообщение.

В ответ запишите полученное сообщение заглавными буквами без пробелов.

Ответ: АМНЕЗИЯ

Решение:

Переведём цветное представление закодированного сообщения в числа в двоичной системе счисления. Запишем каждую строку, начиная сверху. Красный (R) пиксель преобразуется в 0, зелёный (G) пиксель преобразуется в 1, синий (B) пиксель игнорируется (пропускается).

Строка 1: Двоичное представление – 001_101 (знаком “_” обозначается пропуск – пиксель синего цвета). Т. о. получили число 1101_2

Строка 2: _011_10, получается число 1110_2

Строка 3: 1__1_11, получается число 1111_2

Строка 4: 10_0_00, получается число 10000_2

Строка 5: 010_001, получается число 10001_2

Строка 6: 10_0_10, получается число 10010_2

Строка 7: _10011_, получается число 10011_2

Заметим, что все получившиеся двоичные числа идут подряд, каждое следующее больше предыдущего ровно на 1.

Переведём первое двоичное число в десятичную систему счисления: $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$

Таким образом, коды букв слова по порядку в десятичной системе счисления: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

С помощью таблицы для расшифровки букв по их кодам в десятичной системе счисления найдём соответствующие буквы:

- 13 – А
- 14 – М
- 15 – Н
- 16 – Е
- 17 – З
- 18 – И
- 19 – Я

Таким образом, расшифрованное сообщение – АМНЕЗИЯ.

10. Сортировка и фильтрация данных (2 балла)

[Сортировка по четности]

Однажды Маше на глаза попался отсортированный по возрастанию массив из 256 чисел: в нем были все числа от 1 включительно до 256 включительно, при чем каждое встречалось ровно 1 раз. Она подумала, что сортировка по возрастанию – это слишком скучно, и решила применить к массиву сортировку, которую придумала сама.

Сортировка Маши работает по следующему алгоритму:

1) Каждая пара соседних элементов сопоставляется друг с другом: в случае, если левый элемент нечетный, а правый четный – элементы меняются местами. Во всех остальных случаях ничего не происходит. Сопоставления происходят последовательно, то есть сначала сопоставление и возможный обмен происходит между первым и вторым элементами, затем – вторым и третьим, далее – третьим и четвертым и так далее до конца массива, итого 255 сопоставлений.

2) Если при выполнении сопоставлений из первого пункта был произведен хотя бы один обмен, то после завершения всех сопоставлений действия из первого пункта алгоритма выполняется снова.

3) Если ни одно из 255 сопоставлений первого пункта не привело к обмену, сортировка считается завершенной.

На какой позиции окажется число 5 после завершения алгоритма? Элементы в массиве нумеруются, начиная с 1.

Ответ: 131

Решение:

Сортировка устойчивая. Это значит, что если в исходной последовательности два числа имеют одинаковую четность, то их порядок в результирующем массиве не будет изменен относительно исходного.

Проанализируем, что происходит в процессе сортировки: первые 128 позиций займут четные числа, при чем в возрастающем порядке – от 2 до 256. А последние 128 позиций займут нечетные числа – так же в возрастающем порядке. Число 1 окажется на позиции 129, число 3 – на позиции 130, а число 5 – на позиции 131.