Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2022/2023 учебный год.

10–11 класс. Первый вариант

1. В каждой клетке таблицы 100×100 записано натуральное число. В каждой строке имеется по крайней мере 10 различных чисел, а в каждых четырех последовательных строках не более 15 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?

Ответ: 175

Решение. В одной строке не менее 10 различных чисел, поэтому в следующих трех строках вместе появляется не более 5 новых чисел. Стало быть, первые четыре строки содержат не более 15 различных чисел, а каждые следующие три строки дают не более 5 новых чисел и всего чисел не больше, чем $15 + 32 \cdot 5 = 175$.

Приведем пример на 175 чисел. Занумеруем строки числами от 1 до 100. В первой строке поставим числа от 1 до 10, а в строке с номерами от $3k-1$ до $3k+1$ поставим числа 1 до 5 и числа от $5k+6$ до $5k+10$. Тогда в каждой ствоке будет 5 уникальных чисел и еще числа от 1 до 5, т.е. ровно 10 различных чисел, а в каждых четырех строках будет ровно 15 различных чисел. Таким образом, в таблице будут числа от 1 до $5 \cdot 33 + 10 = 175$.

Замечание. Доказать, что количество различных чисел в таблице не превосходит 175 можно доказать и по индукции. А именно, доказать, что в любых $3n+1$ подряд идущих строках расположено не более чем $5(n+2)$ различных чисел. База $n = 1$ верна по условию. Установим переход от n к $n+1$. Рассмотрим $3n+4$ подряд идущие строки. Пусть в четвертой с конца строке имеется $k \geqslant 10$ различных чисел. Тогда в трех самых нижних строках не более чем $15-k$ различных чисел. А в оставшихся $3n+1$ строке по индукционному предположению не больше $5(n+2)$ чисел. Поэтому всего различных чисел будет более чем $5(n+2) + 15 - k = 5(n+5) - k \leqslant 5(n+3)$.

2. Найдите все простые p, для которых числа $p+1$ и p^2+1 являются удвоенными квадратами натуральных чисел.

Ответ: $p = 7$

Первое решение. Пусть $p+1 = 2x^2$ и $p^2+1 = 2y^2$, тогда $2(y^2-x^2) = p(p-1)$. Поэтому либо $y-x$, либо $y+x$ кратно p. Из неравенства $x < y < p$ следует, что $x+y = p$. Таким образом, имеем систему из двух уравнений $x+y = p$ и $2(y-x) = p-1$, решая ее, находим $x = \frac{p+1}{4}$ и, значит, $p+1 = 2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2$. Следовательно, $p = 7$.

Второе решение. Пусть $p+1 = 2x^2$ и $p^2+1 = 2y^2$, тогда $p(p-1) = 2(y^2-x^2) = 2(y-x)(y+x)$. Поэтому одно из чисел 2, $y-x$ и $y+x$ делится на p. Если 2 делится на p, то $p = 2$, что невозможно, поскольку $p+1 = 3$ не является удвоенным квадратом. Если $y-x$ делится на p, то $y+x > y-x \geqslant p$ и, значит, $2(y-x)(y+x) \geqslant 2p^2 > p(p-1)$, что невозможно. Следовательно, $y+x$ делится на p. Заметим, что $\frac{y^2}{x^2} = \frac{p^2+1}{p+1} > \frac{p^2-1}{p+1} = p-1$. Тогда если $p \geqslant 11$, то $y^2 > 12x^2$, откуда $y > 3x$ и, значит, $2(y-x) > y+x \geqslant p$. Стало быть, $2(y-x)(y+x) > p^2 > p(p+1)$, что также невозможно. Таким образом, осталось рассмотреть случаи $p = 3$, $p = 5$ и $p = 7$. В первых двух из них $p+1$ не является удвоенным квадратом, а $p = 7$ подходит.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{a(b+2c)} + \sqrt[4]{b(c+2d)} + \sqrt[4]{c(d+2a)} + \sqrt[4]{d(a+2b)}.$$

Ответ: $4\sqrt[4]{3}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\sqrt[4]{a(b+2c)} = \frac{\sqrt[4]{3a(b+2c) \cdot 3 \cdot 3}}{\sqrt[4]{3^3}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}} \cdot \frac{3a+b+2c+6}{4}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}\Big(\frac{3a+b+2c+6}{4}+\frac{3b+c+2d+6}{4}+\frac{3c+d+2a+6}{4}+\frac{3d+a+2b+6}{4}\Big)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}\cdot\frac{6(a+b+c+d)+24}{4}\leqslant\frac{12}{\sqrt[4]{3^3}}=4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Второе решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[4]{d}$ и $\sqrt[4]{b+2c}$, $\sqrt[4]{c+2d}$, $\sqrt[4]{d+2a}$, $\sqrt[4]{a+2b}$ имеем

$$\big(\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)\big(\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\big).$$

А по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)^2\leqslant(a+b+c+d)(1+1+1+1)\leqslant 4^2,$$

поэтому $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant 4$. Аналогично по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{b+2c}$, $\sqrt{c+2d}$, $\sqrt{d+2a}$, $\sqrt{a+2b}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\big(\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big((b+2c)+(c+2d)+(d+2a)+(a+2b)\big)(1+1+1+1)=12(a+b+c+a)\leqslant 48,$$

поэтому $\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\leqslant 4\sqrt{3}$. Следовательно,

$$\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{3}}=4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Третье решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[4]{d}$ и $\sqrt[4]{b+2c}$, $\sqrt[4]{c+2d}$, $\sqrt[4]{d+2a}$, $\sqrt[4]{a+2b}$ имеем

$$\big(\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}\big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)\big(\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\big).$$

Оценим по-отдельности сомножители в правой части. По неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}(x+1)$, поэтому

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant\frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{c+1}{2}+\frac{d+1}{2}=\frac{a+b+c+d+4}{2}\leqslant 4.$$

Аналогично по неравенству о средних для двух чисел

$$\sqrt{3}\sqrt{x+2y}=\sqrt{(x+2y)\cdot 3}\leqslant\frac{1}{2}(x+2y+3),$$

поэтому

$$\sqrt{b+2c}+\sqrt{c+2d}+\sqrt{d+2a}+\sqrt{a+2b}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{b+2c+3}{2\sqrt{3}}+\frac{c+2d+3}{2\sqrt{3}}+\frac{d+2a+3}{2\sqrt{3}}+\frac{a+2b+3}{2\sqrt{3}}=\frac{3(a+b+c+d)+12}{2\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.$$

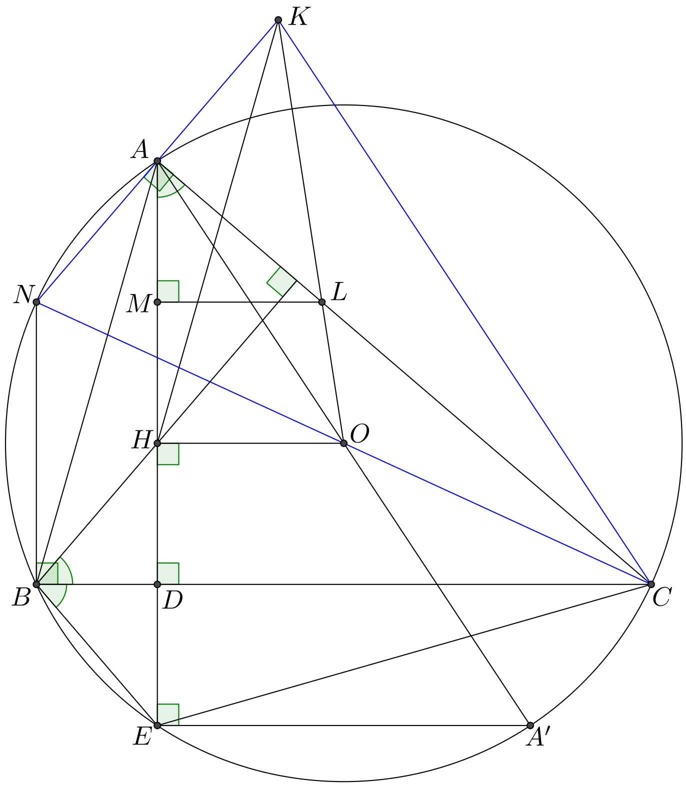
Следовательно,

$$\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{3}}=4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, а H — точка пересечения его высот. Оказалось, что прямая OH параллельна стороне BC. На плоскости отметили такую точку K, что $ABHK$ — параллелограмм. Отрезки OK и AC пересеклись в точке L. В каком отношении перпендикуляр, опущенный из точки L на отрезок AH, делит AH?

Ответ: $1 : 1$

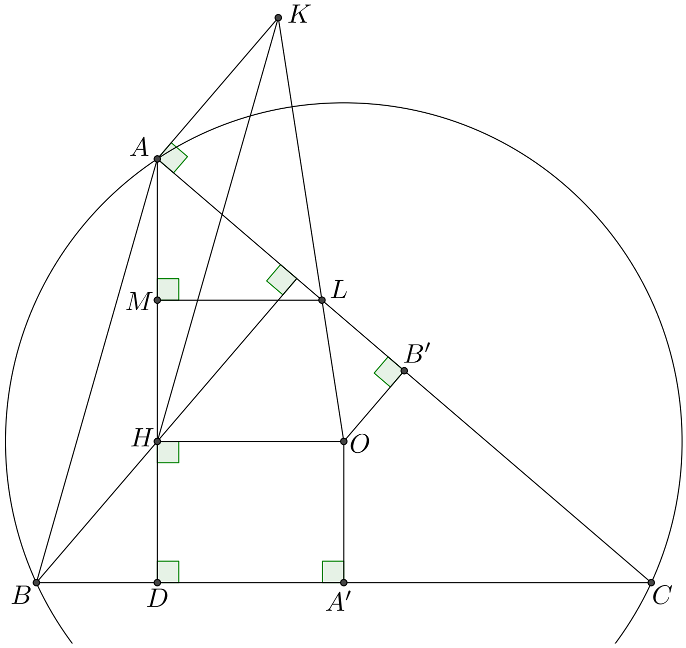


Первое решение. Пусть D — основание высоты из точки A, а точка E — пересечение этой высоты с описанной окружностью треугольника ABC, точка A' диаметрально противоположна точке A на этой окружности, а точка N — вторая точка пересечения прямой AK с этой окружностью. Из параллельности прямых OH и BC следует, что прямая OH перпендикулярна высоте AD. Поскольку AA' — диаметр окружности, $\angle AEA' = 90^\circ$ и, значит, прямые $A'E$ и OH параллельны. Стало быть, OH — средняя линия треугольника $AA'E$, поэтому $AH = HE$. Далее,

$$\angle CBE = \angle CAE = 90^\circ - \angle ACB = \angle CBH,$$

поэтому в треугольнике BEH отрезок BD является биссектрисой и высотой, а, значит, и медианой. Таким образом, $HD = DE$. Из равенств $AH = HE$ и $HD = DE$ получаем, что $AH : AD = 2 : 3$.

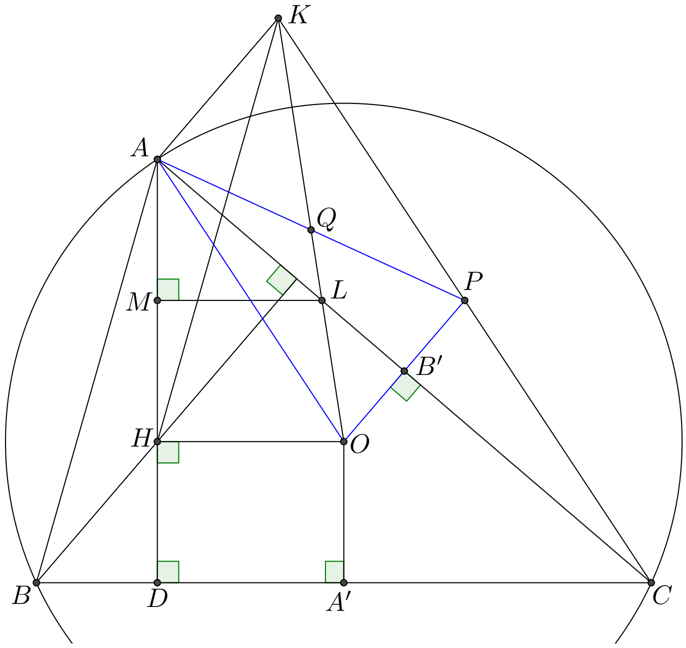
По условию прямые AK и BH параллельны, а прямая BH перпендикулярна прямой AC, поэтому $\angle NAC = 90^\circ$ и точки C и N диаметрально противоположны. Следовательно, $\angle NBC = 90^\circ$ и поэтому прямые NB и AH параллельны. Таким образом, четырехугольник $AHBN$ является параллелограммом. Стало быть, $AN = BH = AK$ и отрезок CA является медианой в треугольнике KCN. Но отрезок KO также является медианой в этом треугольнике. Следовательно, L — точка пересечения медиан этого треугольника и $AL : AC = 1 : 3$. Тогда по теореме Фалеса $AM : AD = 1 : 3$. Но мы уже знаем, что $AH : AD = 2 : 3$, поэтому $AM = MH$.



Второе решение. Заметим, что если точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC, то треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. С другой стороны центр описанной окружности треугольника ABC является точкой пересечения высот треугольника $A'B'C'$. Следовательно, $AH = 2OA'$ и $BH = 2OB'$.

Пусть D — основание высоты из точки A, а M — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на AH. Прямая OA' — серединный перпендикуляр к отрезку BC, поэтому она параллельна высоте AD. По условию прямые OH и BC параллельны, следовательно, $OHDA'$ — прямоугольник и $HD = OA' = \frac{1}{2}AH$.

В параллелограмме $ABHK$ противоположные стороны равны, поэтому $AK = BH = 2OB'$. Треугольники ALK и $B'LO$ подобны по двум углам ($\angle ALK = \angle B'LO$ как вертикальные, $\angle OB'L = 90^\circ = \angle KAL$) и их коэффициент подобия равен 2. Пусть $LB' = x$, тогда $AL = 2x$ и $CB' = AB' = 3x$, поскольку B' — середина стороны AC. Стало быть, $AL : AC = 2x : 6x = 1 : 3$ и $AM : AD = 1 : 3$, так как треугольники ALM и ACD подобны. Пусть $HD = y$, тогда $OA' = y$, $AH = 2y$ и $AD = AH + HD = 3y$. Следовательно, $AM = y$ и $MH = AH - AM = 2y - y = y$. Таким образом, $AM : MH = 1$.



Третье решение. Заметим, что если точки A', B' и C' — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC, то треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. С другой стороны центр описанной окружности треугольника ABC является точкой пересечения высот треугольника $A'B'C'$. Следовательно, $AH = 2OA'$ и $BH = 2OB'$.

Пусть D — основание высоты из точки A, M — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на AH, P — середина отрезка AK. Прямая OA' — серединный перпендикуляр к отрезку BC, поэтому она параллельна высоте AD. По условию прямые OH и BC параллельны, следовательно, $OHDA'$ — прямоугольник и $HD = OA' = \frac{1}{2}AH$. Таким образом, $\frac{AH}{AD} = \frac{2}{3}$. По условию прямые AK и BH параллельны, а прямая BH перпендикулярна прямой AC, поэтому $\angle KAC = 90°$. По условию $ABHK$ параллелограмм, значит, $AK = BH$. Отрезок $B'P$ — средняя линия треугольника CAK, поэтому $B'P = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}BH = OB'$. Кроме того, OB' и PB' перпендикулярны AC, поэтому точки O, B' и P лежат на одной прямой. Таким образом, $OP = 2OB' = AK$ и OP параллельна AK. Стало быть, $AOPK$ — параллелограмм. Пусть Q — точка пересечения его диагоналей, тогда $AQ = QP$. Следовательно, AB' и OQ — медианы треугольника AOP, а L — точка их пересечения, поэтому $AL : AB' = 2 : 3$ и, значит, $AL : AC = 1 : 3$. Из подобия треугольников AML и ADC следует, что $\frac{AM}{AD} = \frac{AL}{AC} = \frac{1}{3}$. Тогда если $AM = x$, то $AD = 3x$ и $AH = 2x$, а, значит, $MH = x$ и $AM : MH = 1 : 1$.

5. В классе n мальчиков и n девочек ($n \geqslant 3$). Они расселись за круглым столом так, что никакие два мальчика и никакие две девочки не сидят рядом. У учителя есть $2n$ карточек, на них написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2n$, каждое по одному разу. Он так раздал каждому школьнику по одной карточке, что число у любой девочки больше числа у любого мальчика. Затем каждая девочка написала на листочке сумму чисел на трех карточках: ее собственной и сидящих рядом с ней мальчиков. При каких n все полученные n чисел могли оказаться равными?

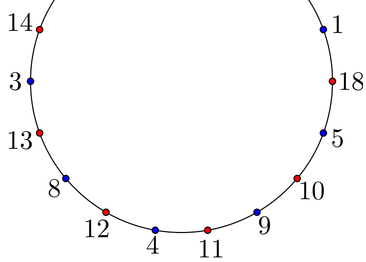
Ответ: при нечетных n

Решение. По условию мальчики получили карточки с числами от 1 до n, а девочки карточки с числами от $n+1$ до $2n$. Предположим, что у всех девочек на листочках оказалось написано число m. Тогда сумма всех чисел на листочках равна mn, с другой стороны она может быть получена следующим образом: надо сложить все числа, которые есть у девочек и добавить к ним удвоенную сумму всех чисел, которые есть у мальчиков.

Следовательно,

$$mn = 2\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=n+1}^{2n} j = \sum_{j=1}^{2n} j + \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}2n(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = n(2n+1) + n \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Стало быть, $m = 2n+1+\frac{n+1}{2}$ и n — нечетно. Пусть $n = 2k-1$, тогда $m = 5k-1$. Для примера надо последовательно раздать карточки мальчикам от 1 до $2k-1$ идя через одного. Если теперь для каждой девочки посмотреть на сумму чисел, на карточках соседних с ней мальчиков, то по одному разу получатся все суммы от $k+1$ до $3k-1$. Дальше нужно дополнить их числами от $2k$ до $4k-2$ (раздав соответствующие карточки девочкам) так, чтобы все суммы стали равны $5k-1$. Пример раздачи карточек для $n = 9$ и $k = 5$ показан на рисунке.



10–11 класс. Второй вариант

1. В каждой клетке таблицы 75×75 записано натуральное число. В каждой строке имеется по крайней мере 15 различных чисел, а в каждых трех последовательных строках не более 25 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?

Ответ: 385

Решение. В одной строке не менее 15 различных чисел, поэтому в следующих двух строках вместе появляется не более 10 новых чисел. Стало быть, первые три строки содержат не более 25 различных чисел, а каждые следующие две строки дают не более 10 новых чисел и всего чисел не больше, чем $25 + 36 \cdot 10 = 385$.

Приведем пример на 385 чисел. Занумеруем строки числами от 1 до 75. В первой строке поставим числа от 1 до 15, а в строке с номером k поставим числа 1 до 10 и числа от $5k+6$ до $5k+10$. Тогда в каждой ствоке будет 5 уникальных чисел и еще числа от 1 до 10, т.е. ровно 15 различных чисел, а в каждых трех строках будет ровно 25 различных чисел.

Замечание. Доказать, что количество различных чисел в таблице не превосходит 385 можно доказать и по индукции. А именно, доказать, что в любых $2n+1$ подряд идущих строках расположено не более чем $5(2n+3)$ различных чисел. База $n = 1$ верна по условию. Установим переход от n к $n+1$. Рассмотрим $2n+3$ подряд идущих строк. Пусть в третьей с конца строке имеется $k \geqslant 15$ различных чисел. Тогда в двух самых нижних строках не более чем $25 - k$ различных чисел. А в оставшихся $2n+1$ строке по индукционному предположению не больше $5(2n+3)$ чисел. Поэтому всего различных чисел будет более чем $5(2n+3) + 25 - k = 5(2n+8) - k \leqslant 5(2n+5)$.

2. Найдите все простые p, для которых числа $p+7$ и p^2+7 являются удвоенными квадратами натуральных чисел.

Ответ: $p = 11$

Первое решение. Пусть $p + 7 = 2x^2$ и $p^2 + 7 = 2y^2$, тогда $2(y^2 - x^2) = p(p-1)$. Поскольку p — нечетно, $p \geqslant 3$ и $2p^2 > p^2 + 7$. Следовательно, $x < y < p$. Поэтому либо $y-x$, либо $y+x$ кратно p. Из неравенства $2y^2 = p^2+7 < 2p^2$ следует, что $x < y < p$, поэтому $x + y = p$. Таким образом, имеем систему из двух уравнений $x + y = p$ и $2(y - x) = p - 1$, решая ее, находим $x = \frac{p+1}{4}$ и, значит, $p + 7 = 2\left(\frac{p+1}{4}\right)^2$. Стало быть, $p^2 - 6p - 55 = 0$, откуда $p = 11$.

Второе решение. Пусть $p + 7 = 2x^2$ и $p^2 + 7 = 2y^2$, тогда $p(p-1) = 2(y^2 - x^2) = 2(y-x)(y+x)$. Поэтому одно из чисел 2, $y - x$ и $y + x$ делится на p. Если 2 делится на p, то $p = 2$, что невозможно, поскольку $p + 7 = 9$ не является удвоенным квадратом. Если $y - x$ делится на p, то $y + x > y - x \geqslant p$ и, значит, $2(y-x)(y+x) \geqslant 2p^2 > p(p-1)$, что невозможно. Следовательно, $y + x$ делится на p. Заметим, что $\frac{y^2}{x^2} = \frac{p^2+7}{p+7} > \frac{p^2-49}{p+7} = p - 7$. Тогда если $p \geqslant 17$, то $y^2 > 10x^2$, откуда $y > 3x$ и, значит, $2(y - x) > y + x \geqslant p$. Стало быть, $2(y-x)(y+x) > p^2 > p(p+1)$, что также невозможно. Таким образом, осталось рассмотреть случаи $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$, $p = 11$ и $p = 13$. В последнем, а также в первых трех из них $p + 7$ не является удвоенным квадратом, а $p = 11$ подходит.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{a^2+3ab} + \sqrt[4]{b^2+3bc} + \sqrt[4]{c^2+3cd} + \sqrt[4]{d^2+3da}.$$

Ответ: $4\sqrt{2}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\sqrt[4]{a^2+3ab} = \frac{\sqrt[4]{4a \cdot (a+3b) \cdot 4 \cdot 4}}{2\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{4a + (a+3b) + 4 + 4}{4}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\sqrt[4]{a^2+3ab}+\sqrt[4]{b^2+3bc}+\sqrt[4]{c^2+3cd}+\sqrt[4]{d^2+3da}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{5a+3b+8}{4}+\frac{5b+3c+8}{4}+\frac{5c+3d+8}{4}+\frac{5d+3a+8}{4}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{8(a+b+c+d)+32}{4}\leqslant\frac{16}{2\sqrt{2}}=4\sqrt{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Второе решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[4]{d}$ и $\sqrt[4]{a+3b}$, $\sqrt[4]{b+3c}$, $\sqrt[4]{c+3d}$, $\sqrt[4]{d+3a}$ имеем

$$\big(\sqrt[4]{a(a+3b)}+\sqrt[4]{b(b+3c)}+\sqrt[4]{c(c+3d)}+\sqrt[4]{d(d+3a)}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)\big(\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\big).$$

А по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)^2\leqslant(a+b+c+d)(1+1+1+1)\leqslant 4^2,$$

поэтому $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant 4$. Аналогично по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{a+3b}$, $\sqrt{b+3c}$, $\sqrt{c+3d}$, $\sqrt{d+3a}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\big(\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big((a+3b)+(b+3c)+(c+3d)+(d+3a)\big)(1+1+1+1)=16(a+b+c+a)\leqslant 64,$$

поэтому $\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\leqslant 8$. Следовательно,

$$\sqrt[4]{a^2+3ab}+\sqrt[4]{b^2+3bc}+\sqrt[4]{c^2+3cd}+\sqrt[4]{d^2+3da}\leqslant\sqrt{4\cdot 8}=4\sqrt{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Третье решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[4]{d}$ и $\sqrt[4]{a+3b}$, $\sqrt[4]{b+3c}$, $\sqrt[4]{c+3d}$, $\sqrt[4]{d+3a}$ имеем

$$\big(\sqrt[4]{a(a+3b)}+\sqrt[4]{b(b+3c)}+\sqrt[4]{c(c+3d)}+\sqrt[4]{d(d+3a)}\big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\big(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\big)\big(\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\big).$$

Оценим по-отдельности сомножители в правой части. По неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}(x+1)$, поэтому

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\leqslant\frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{c+1}{2}+\frac{d+1}{2}=\frac{a+b+c+d+4}{2}\leqslant 4.$$

Аналогично по неравенству о средних для двух чисел

$$2\sqrt{x+2y}=\sqrt{(x+2y)\cdot 4}\leqslant\frac{1}{2}(x+3y+4),$$

поэтому

$$\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3d}+\sqrt{d+3a}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a+3b+4}{4}+\frac{b+3c+4}{4}+\frac{c+3d+4}{4}+\frac{d+3a+4}{4}=\frac{4(a+b+c+d)+16}{4}=8.$$

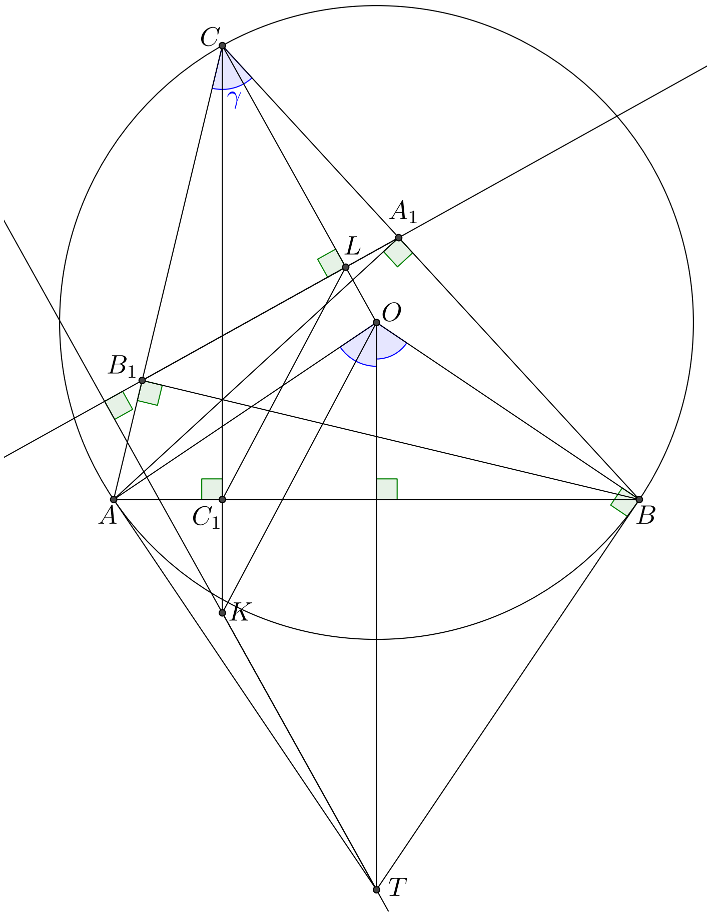
Следовательно,

$$\sqrt[4]{a^2+3ab}+\sqrt[4]{b^2+3bc}+\sqrt[4]{c^2+3cd}+\sqrt[4]{d^2+3da}\leqslant\sqrt{4\cdot 8}=4\sqrt{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

4. В остроугольном треугольнике ABC опущены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. На плоскости выбрана такая точка T, что прямые TA и TB являются касательными к описанной окружности треугольника ABC, точка O — центр этой окружности. Перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую A_1B_1, пересекает прямую CC_1 в точке K, а проходящая через точку C_1 параллельная OK прямая пересекает отрезок CO в точке L. Найдите угол $\angle CLA_1$.

Ответ: 90°



Решение. Положим $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ACB = \gamma$. Треугольники AOT и BOT равны по трем сторонам, а вписанный угол $\angle ACB$ опирается на ту же дугу, что и центральный угол $\angle AOB$, поэтому $\gamma = \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle TOB$. Следовательно, $\frac{OB}{OT} = \cos\gamma$. Аналогично $\angle BOC = 2\angle BAC$ и из равнобедренности треугольника BOC следует, что $\angle BCO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle BAC$. Поскольку $\angle AB_1B = 90^\circ = \angle AA_1B$, четырехугольник AB_1A_1B вписанный. Следовательно, $\angle BAC = \angle CA_1B_1$. Стало быть, $\angle BCO = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \angle CA_1B_1$ и прямые A_1B_1 и CO перпендикулярны. Таким образом, прямые CO и TK параллельны, а, значит, четырехугольник $COTK$ является параллелограммом, в частности, $CK = OT$. Тогда по теореме Фалеса $\frac{CL}{CC_1} = \frac{CO}{CK} = \frac{OB}{OT} = \cos\gamma$. Стало быть,

$$CL = CC_1\cos\gamma = AC\sin\alpha\cos\gamma = CA_1\sin\alpha = CA_1\sin\angle CA_1B_1.$$

Таким образом, точка L — основание перпендикуляра, опущенного из C на прямую A_1B_1, значит, $\angle CLA_1 = 90^\circ$.

5. В классе n мальчиков и n девочек ($n \geqslant 3$). Они расселись за круглым столом так, что никакие два мальчика и никакие две девочки не сидят рядом. У учителя есть $2n$ карточек, на них написаны числа 1, 2, 3, …, $2n$, каждое по одному разу. Он так раздал каждому школьнику по одной карточке, что число у любой девочки больше числа у любого мальчика. Затем каждый мальчик написал на листочке сумму чисел на трех карточках:

его собственной и сидящих рядом с ним девочек. При каких n все полученные n чисел могли оказаться равными?

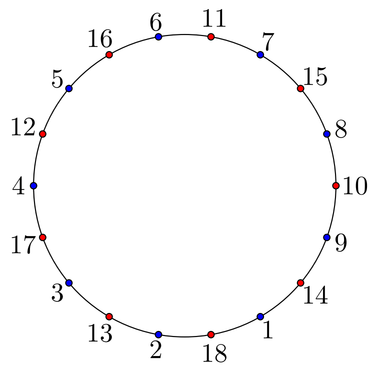
Ответ: при нечетных n

Решение. По условию мальчики получили карточки с числами от 1 до n, а девочки карточки с числами от $n+1$ до $2n$. Предположим, что у всех мальчиков на листочках оказалось написано число m. Тогда сумма всех чисел на листочках равна mn, с другой стороны она может быть получена следующим образом: надо сложить все числа, которые есть у мальчиков и добавить к ним удвоенную сумму всех чисел, которые есть у девочек.

Следовательно,

$$mn = \sum_{j=1}^{n} j + 2\sum_{j=n+1}^{2n} j = 2\sum_{j=1}^{2n} j - \sum_{j=1}^{n} j = 2n(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) = 2n(2n+1) - n \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Стало быть, $m = 4n + 2 - \frac{n+1}{2}$ и n — нечетно. Пусть $n = 2k-1$, тогда $m = 7k-2$. Для примера надо последовательно раздать карточки девочкам от $2k$ до $4k-2$, идя через одну. Если теперь для каждого мальчика посмотреть на сумму чисел, имеющихся у сидящих рядом с ним девочек, то по одному разу получатся все суммы от $5k-1$ до $7k-3$. Дальше нужно дополнить их числами от 1 до $2k-1$ (раздав соответствующие карточки мальчикам) так, чтобы все суммы стали равны $7k-2$. Пример раздачи карточек для $n = 9$ и $k = 5$ показан на рисунке.

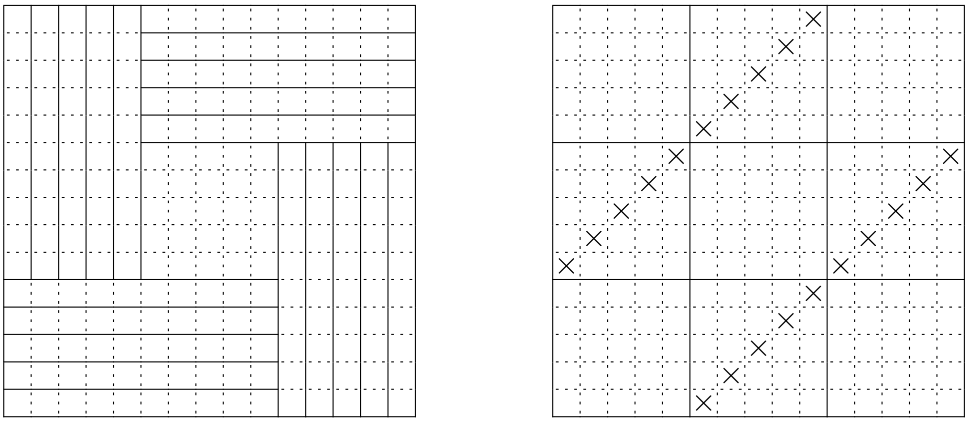


10–11 класс. Третий вариант

1. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 15×15 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×10 была хотя бы одна отмеченная клетка.

Ответ: 20

Решение. Разрежем таблицу 15×15 без центрального квадрата 5×5 на 20 прямоугольников 1×10 (см. левый рисунок). Следовательно, придется отметить не менее 20 клеток. Пример на 20 клеток: отмечены все клетки двух параллельных диагоналей длины 10 (см. правый рисунок).



2. Найдите все такие тройки простых чисел p, q и r, что $\dfrac{p}{q} = \dfrac{4}{r+1} + 1$.
Ответ: $(7, 3, 2)$; $(5, 3, 5)$; $(3, 2, 7)$.

Первое решение. Перепишем соотношение в виде

$$4q = (p - q)(r + 1). \qquad (*)$$

Если $q = 2$, то оно принимает вид $8 = (p-2)(r+1)$. Тогда $p-2$ является степенью двойки и, значит, $p = 3$ и $r = 7$. Если $r = 2$, то соотношение $(*)$ принимает вид $4q = 3(p - q)$, откуда $q = 3$ и $p = 7$. Будем дальше считать, что q и r — нечетные простые числа. Но тогда и p нечетно, поскольку иначе левая часть $(*)$ отрицательна. Следовательно, $r+1 \geqslant 4$ и $p - q$ — четные числа, поэтому $p - q = 2$ и $r + 1 = 2q$. Если $q = 3$, то $p = 5$ и $r = 5$. Если же $q > 3$, то поскольку p и q не делятся на 3 и $p = q + 2$, q имеет вид $3k + 2$, но тогда $r = 2q - 1 = 6k + 3$, что невозможно.

Второе решение. Из условия следует, что $p > q$. Домножим на знаменатели и перепишем соотношение в виде $5q - p = (p - q)r$. Отсюда, в частности, получаем, что $5q - p$ делится на $p - q$. Следовательно, $4q = (5q - p) + (p - q)$ также делится на $p - q$. С другой стороны $4p = (5q - p) + 5(p - q)$ также делится на $p - q$. Таким образом, на $p - q$ делится и наибольший общий делитель чисел $4p$ и $4q$, но этот делитель равен 4. Стало быть возможны лишь три случая: $p - q = 1$, $p - q = 2$ и $p - q = 4$. Отметим сразу, что во втором и третьем случаях $p \geqslant q + 2 \geqslant 4$ и, в частности, p не делится на три.

Первый случай возможен только когда $p = 3$ и $q = 2$, а тогда $r = 7$ и это первое решение.

Во втором случае $p - q = 2$ и тогда $r = \frac{1}{2}(5q - p) = 2q - 1 = 2p - 5$. Если r дает остаток 1 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 2 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q = 3$, $p = 5$ и $r = 5$, что дает второе решение.

В третьем случае $p - q = 4$ и тогда $r = \frac{1}{4}(5q - p) = q - 1 = p - 5$. Если r дает остаток 1 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 2 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q = 3$, $p = 7$ и $r = 2$, что является третьим решением.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}.$$

Ответ: $4\sqrt[4]{2}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\sqrt[4]{a^2(a+b)}=\frac{\sqrt[4]{2a\cdot 2a\cdot(a+b)\cdot 2}}{\sqrt[4]{8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\cdot\frac{2a+2a+(a+b)+2}{4}=\frac{5a+b+2}{4\sqrt[4]{8}}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\begin{aligned}&\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\Big(\frac{5a+b+2}{4}+\frac{5b+c+2}{4}+\frac{5c+d+2}{4}+\frac{5d+a+2}{4}\Big)=\\&=\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\cdot\frac{6(a+b+c+d)+8}{4}\leqslant\frac{8}{\sqrt[4]{8}}=4\sqrt[4]{2}.\end{aligned}$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Второе решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и $\sqrt[4]{a+b}$, $\sqrt[4]{b+c}$, $\sqrt[4]{c+d}$, $\sqrt[4]{d+a}$ имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\big)^2\leqslant\\&\leqslant\big(a+b+c+d\big)\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big)\leqslant 4\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big).\end{aligned}$$

А по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{b+c}$, $\sqrt{c+d}$, $\sqrt{d+a}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big)^2\leqslant\\&\qquad\leqslant\big((a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\big)(1+1+1+1)=8(a+b+c+d)\leqslant 32,\end{aligned}$$

поэтому $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\leqslant 4\sqrt{2}$. Таким образом,

$$\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{2}}=4\sqrt[4]{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Третье решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и $\sqrt[4]{a+b}$, $\sqrt[4]{b+c}$, $\sqrt[4]{c+d}$, $\sqrt[4]{d+a}$ имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\big)^2\leqslant\\&\leqslant\big(a+b+c+d\big)\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big)\leqslant 4\big(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}\big).\end{aligned}$$

По неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{2}\sqrt{x+y}=\sqrt{2(x+y)}\leqslant\frac{1}{2}(x+y+2)$, поэтому

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+d}+\sqrt{d+a}&\leqslant\frac{a+b+2}{2\sqrt{2}}+\frac{b+c+2}{2\sqrt{2}}+\frac{c+d+2}{2\sqrt{2}}+\frac{d+a+2}{2\sqrt{2}}=\\&=\frac{2(a+b+c+d)+8}{2\sqrt{2}}\leqslant 4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

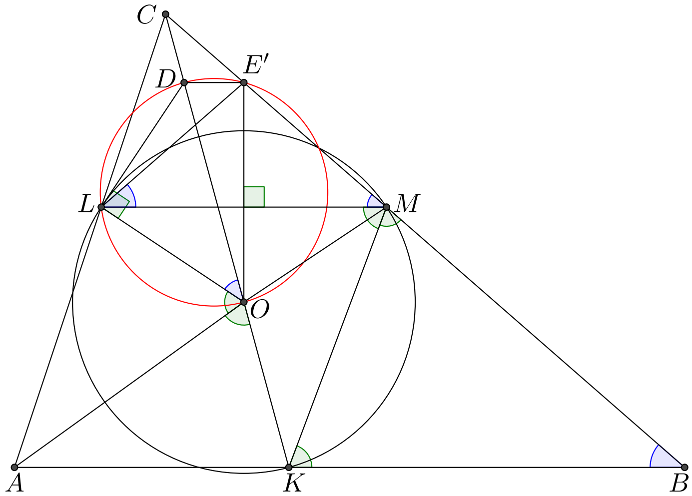
Следовательно,

$$\sqrt[4]{a^2(a+b)}+\sqrt[4]{b^2(b+c)}+\sqrt[4]{c^2(c+d)}+\sqrt[4]{d^2(d+a)}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{2}}=4\sqrt[4]{2}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

4. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на сторонах AC и BC выбраны соответственно такие точки L и M, что $AK = AL$ и $BK = BM$. Оказалось, что прямые LM и AB параллельны. Касательная в точке L к описанной окружности треугольника KLM пересекает отрезок CK в точке D, а проходящая через D прямая, параллельная стороне AB, пересекает сторону BC в точке E. Найдите угол $\angle DEO$, где O — центр описанной окружности треугольника KLM.

Ответ: $\angle DEO = 90°$



Первое решение. По условию $OK = OL = OM$ и треугольники AKO и ALO равны по трем сторонам, значит, $\angle AOK = \angle AOL = \angle KML$, последнее поскольку $\angle KML$ — вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный угол $\angle KOL$. Из параллельности прямых AB и LM и равнобедренности треугольника KBM следует, что $\angle KML = \angle MKB = \angle KMB$. Таким образом,

$$\angle KOL = 2\angle AOK = 2\angle KML = \angle KML + \angle KMB = \angle BML = 180° - \angle CML = 180° - \angle B.$$

Аналогично $\angle KOM = 180° - \angle A$. Следовательно,

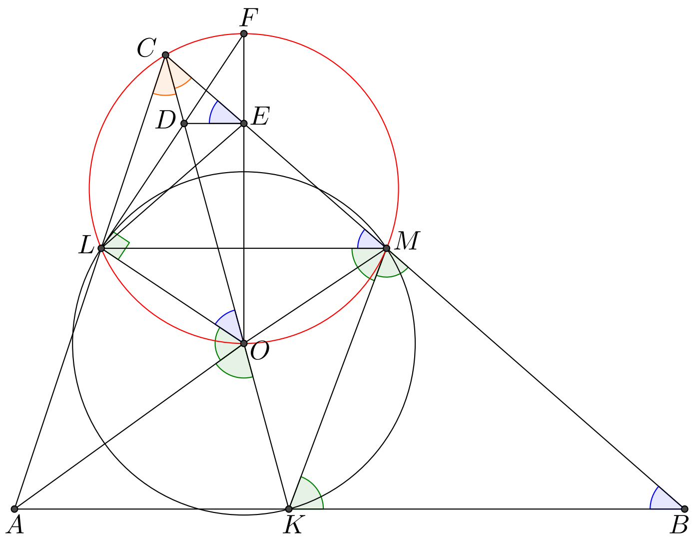
$$\angle LOM = 360° - \angle KOL - \angle KOM = \angle A + \angle B = 180° - \angle C.$$

Стало быть, четырехугольник $CLOM$ вписанный и $\angle COL = \angle CML$. Таким образом,

$$\angle COK = \angle COL + \angle KOL = \angle CML + (180° - \angle CML) = 180°$$

и, значит, точка O лежит на прямой CK.

Пусть E' — точка пересечения высоты равнобедренного треугольника LOM с прямой BC. Тогда она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку LM и, в частности, $\angle E'LM = \angle E'ML = \angle B$. Следовательно, $\angle LE'O = 90° - \angle B$. С другой стороны $\angle LDO = 90° - \angle LOD = 90° - \angle B$. Таким образом, четырехугольник $OLDE'$ является вписанным, значит, $\angle DE'O = 180° - \angle DLO = 90°$. Таким образом, DE' параллельно LM и поэтому точки E и E' совпадают.



Второе решение. По условию треугольники KAL и KBM равнобедренные, значит, серединные перпендикуляры к отрезкам KL и KM, точкой пересечения которых является точка O, являются биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$. Следовательно, точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC и, значит, CO — биссектриса угла $\angle C$. Из параллельности прямых AB и LM и равнобедренности треугольника KBM следует, что $\angle KML = \angle MKB = \angle KMB$. Поэтому MK – биссектриса внешнего угла треугольника CLM. Аналогично LK также является биссектрисой внешнего угла треугольника CLM. Следовательно, K — центр вневписанной окружности треугольника CLM. Поэтому точка K лежит и на биссектрисе угла $\angle LCM$, т. е. на прямой CO.

Поскольку $\angle KOL$ центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный угол $\angle KML$, $\angle KOL = 2\angle KML$. Следовательно,

$$\angle COL = 180^\circ - \angle KOL = 180^\circ - 2\angle KML = 180^\circ - \angle BML = \angle CML.$$

Таким образом, треугольники CLO и CDE подобны по двум углам. Стало быть, $\frac{CO}{CE} = \frac{CL}{CD}$, а тогда треугольники CLD и COE подобны по углам и отношениям прилежащих к ним сторонам. Сделаем поворотную гомотетию на угол $\angle ACO$ с центром в точке C, при которой точка O переходит в точку L. Тогда треугольник COE перейдет в треугольник CLD и, в частности, прямая OE перейдет в прямую LD. Следовательно, угол между этими прямыми равен $\angle ACO$. Обозначим их точку пересечения через F, тогда $\angle LFO = \angle LCO$ и, значит, четырехугольник $CLOF$ вписанный. Следовательно, $\angle FCO = \angle FLO = 90^\circ$. Аналогично, $\angle DCE = \angle DFE$ и, значит, четырехугольник $CDEF$ вписанный. Поэтому $\angle DEF = \angle DCF = 90^\circ$ и, значит, $\angle DEF = 90^\circ$.

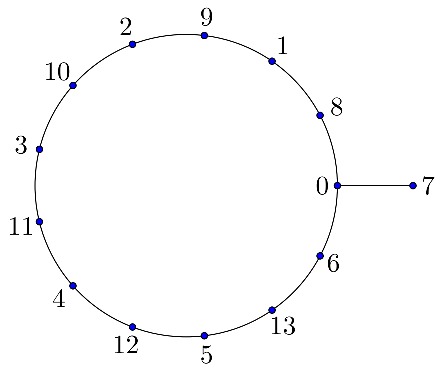
5. За круглым столом сидит $n - 1$ школьник ($n \geqslant 4$). У учителя есть n карточек, на них написаны числа 1, 2, 3, ..., n, каждое по одному разу. Он раздал каждому школьнику по одной карточке и одну карточку оставил себе. Для каждой пары сидящих рядом школьников посчитали сумму чисел на их карточках и записали на доске, потом на доску дописали сумму чисел на карточке у учителя и одного из школьников. При каких n выписанные на доску n чисел могли давать различные остатки от деления на n?

Ответ: при четных n

Решение. Поскольку мы интересуемся исключительно остатками от деления на n, для удобства заменим карточку с числом n на карточку с числом 0. Предположим, что существует подходящий способ раздать карточки. Занумеруем школьников по кругу числами от 0 до $n - 2$ (начиная со школьника, число которого суммируется с числом учителя) и обозначим через a_k число, которое написано на карточке k-го школьника, а число учителя

пусть будет a_{n-1}. Тогда
$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}.$$
С другой стороны суммы
$$a_{n-1}+a_0, \quad a_0+a_1, \quad a_1+a_2, \quad a_2+a_3, \ \ldots, \ a_{n-3}+a_{n-2}, \quad a_{n-2}+a_0$$
дают различные остатки от деления на $n+1$, поэтому их остатки — это числа $0, 1, \ldots, n$, выписанные в некотором порядке. Следовательно,
$$\begin{aligned}(a_{n-1}+a_0)+(a_0+a_1)+(a_1+a_2)+\ldots+(a_{n-3}+a_{n-2})+(a_{n-2}+a_0) = \\ = (a_0-a_{n-1}) + 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k = (a_0-a_{n-1})+(n-1)n\end{aligned} \qquad (*)$$
дает тот же остаток от деления на n, что и сумма $0+1+2+\ldots+(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$. Если $n-1$ — четное число, то $\frac{1}{2}(n-1)n$ делится на n, поэтому сумма $(*)$ также должна делиться на n. Но в этом случае числа a_0 и a_{n-1} дают одинаковые остатки от деления на n, что невозможно. Следовательно, n — четно. Если же $n=2k$, то числа a_0 и a_{n-1} должны давать одинаковые остатки от деления на k.

Предъявим удовлетворяющую условию раздачу карточек для $n=2k$. Учитель оставит себе карточку с числом k, т. е. $a_{2k-1}=k$, а ученику с карточкой которого будет суммироваться k, выдаст карточку с числом 0. Карточки с числами от 1 до $k-1$ раздадим в порядке возрастания чисел двигаясь по часовой стрелке через одного школьника. Таким образом, $a_0=0$, $a_2=1$, $a_4=2$, $\ldots$, $a_{2k-2}=k-1$. Карточки с числами от $k+1$ до $2k-1$ раздадим в порядке возрастания чисел продолжая двигаться по часовой стрелке через одного школьника. Таким образом, $a_1=k+1$, $a_3=k+2$, $a_5=k+3$, $\ldots$, $a_{2k-3}=2k-1$. Пример раздачи карточек для $n=14$ и $k=7$ показан на рисунке.

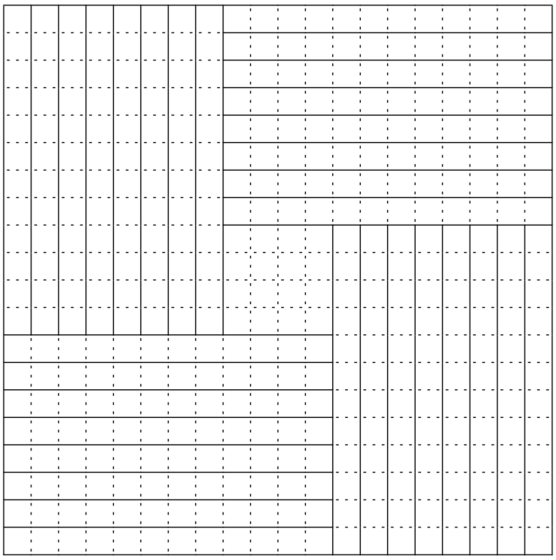


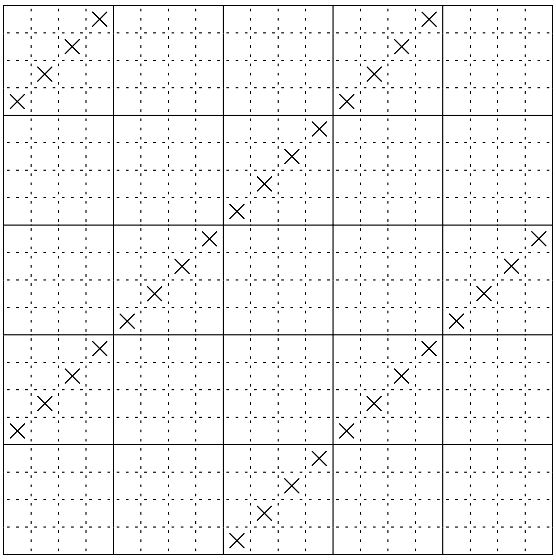
10–11 класс. Четвертый вариант

1. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 20×20 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×12 была хотя бы одна отмеченная клетка.

Ответ: 32

Решение. Разрежем таблицу 20×20 без центрального квадрата 4×4 на 32 прямоугольника 1×12 (см. левый рисунок). Следовательно, придется отметить не менее 32 клеток. Пример на 32 клетки: отмечены все клетки трех параллельных диагоналей длин 4, 16 и 12 (см. правый рисунок).





2. Найдите все такие тройки простых чисел p, q и r, что $\dfrac{p}{q} = \dfrac{8}{r-1} + 1$.

Ответ: $(7, 3, 7)$; $(5, 3, 13)$; $(3, 2, 17)$.

Первое решение. Перепишем соотношение в виде

$$8q = (p - q)(r - 1). \qquad (*)$$

Если $q = 2$, то оно принимает вид $16 = (p - 2)(r - 1)$. Тогда $p - 2$ является степенью двойки и, значит, $p = 3$ и $r = 17$. Если $r = 2$, то то соотношение $(*)$ принимает вид $8q = p - q$, откуда $p = 9q$, что невозможно. Будем дальше считать, что q и r — нечетные простые числа. Но тогда простое число p также нечетно, поскольку иначе левая часть $(*)$ отрицательна. Следовательно, $r - 1$ и $p - q$ — четные числа, поэтому $p - q = 2$ и $r - 1 = 4q$ или $p - q = 4$ и $r - 1 = 2q$. Если $q = 3$, то в первом случае $p = 5$ и $r = 13$, а во втором случае $p = r = 7$. Таким образом, можно считать, что $q > 3$. Рассмотрим первый случай. Поскольку p и q не делятся на 3 и $p = q+2$, q имеет вид $3k+2$, но тогда $r = 4q+1 = 12k+9$, что невозможно. Рассмотрим второй случай. Поскольку p и q не делятся на 3 и $p = q + 4$, q имеет вид $3k + 1$, но тогда $r = 2q + 1 = 6k + 3$, что также невозможно.

Второе решение. Из условия следует, что $p > q$. Домножим на знаменатели и перепишем соотношение в виде $7q + p = (p - q)r$. Отсюда, в частности, получаем, что $7q + p$ делится на $p - q$. Следовательно, $8q = (7q + p) - (p - q)$ также делится на $p - q$. С другой стороны $8p = (7q + p) + 7(p - q)$ также делится на $p - q$. Таким образом, на $p - q$ делится и наибольший общий делитель чисел $8p$ и $8q$, но этот делитель равен 8. Стало быть возможны лишь три случая: $p - q = 1$, $p - q = 2$, $p - q = 4$ и $p - q = 8$. Отметим сразу, что в последних трех случаях $p \geqslant q + 2 \geqslant 4$ и, в частности, p не делится на три.

Первый случай возможен только когда $p = 3$ и $q = 2$, а тогда $r = 17$ и это первое решение.

Во втором случае $p-q=2$ и тогда $r=\frac{1}{2}(7q+p)=4q+1=4p-7$. Если r дает остаток 2 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 1 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q=3$, $p=5$ и $r=5$, что дает второе решение.

В третьем случае $p-q=4$ и тогда $r=\frac{1}{4}(7q+p)=2q+1=2p-7$. Если r дает остаток 2 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 1 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q=3$, $p=7$ и $r=7$, что является третьим решением.

В четвертом случае $p-q=8$ и тогда $r=\frac{1}{8}(7q+p)=q+1=p-7$. Если r дает остаток 2 от деления на три, то p будет кратно трем, что невозможно. Если r дает остаток 1 от деления на три, то q будет кратно трем и, значит, $q=3$ и $r=4$, что невозможно.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}.$$

Ответ: $4\sqrt[4]{3}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\sqrt[4]{2a^2+a^2b}=\frac{\sqrt[4]{3a\cdot 3a\cdot(2+b)\cdot 3}}{\sqrt[4]{27}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\cdot\frac{3a+3a+(2+b)+3}{4}=\frac{6a+b+5}{4\sqrt[4]{27}}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\begin{aligned}&\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\Big(\frac{6a+b+5}{4}+\frac{6b+c+5}{4}+\frac{6c+d+5}{4}+\frac{6d+a+5}{4}\Big)=\\&=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\cdot\frac{7(a+b+c+d)+20}{4}\leqslant\frac{12}{\sqrt[4]{27}}=4\sqrt[4]{3}.\end{aligned}$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Второе решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и $\sqrt[4]{2+b}$, $\sqrt[4]{2+c}$, $\sqrt[4]{2+d}$, $\sqrt[4]{2+a}$ имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}\big)^2\leqslant\\&\leqslant\big(a+b+c+d\big)\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big)\leqslant 4\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big).\end{aligned}$$

А по неравенству Коши–Буняковского для наборов $\sqrt{2+a}$, $\sqrt{2+b}$, $\sqrt{2+c}$, $\sqrt{2+d}$ и 1, 1, 1, 1 имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big)^2\leqslant\\&\leqslant\big((2+a)+(2+b)+(2+c)+(2+d)\big)(1+1+1+1)=4(a+b+c+d+8)\leqslant 48,\end{aligned}$$

поэтому $\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\leqslant 4\sqrt{3}$. Таким образом,

$$\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}\leqslant\sqrt{4\cdot 4\sqrt{3}}=4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

Третье решение. По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ и $\sqrt[4]{2+b}$, $\sqrt[4]{2+c}$, $\sqrt[4]{2+d}$, $\sqrt[4]{2+a}$ имеем

$$\begin{aligned}&\big(\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a}\big)^2\leqslant\\&\leqslant\big(a+b+c+d\big)\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big)\leqslant 4\big(\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d}\big).\end{aligned}$$

По неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{3}\sqrt{2+x} = \sqrt{3(2+x)} \leqslant \frac{1}{2}(2+x+3) = \frac{1}{2}(x+5)$, поэтому

$$\sqrt{2+a}+\sqrt{2+b}+\sqrt{2+c}+\sqrt{2+d} \leqslant \frac{a+5}{2\sqrt{3}}+\frac{b+5}{2\sqrt{3}}+\frac{c+5}{2\sqrt{3}}+\frac{d+5}{2\sqrt{3}} = \\ = \frac{(a+b+c+d)+20}{2\sqrt{3}} \leqslant 4\sqrt{3}.$$

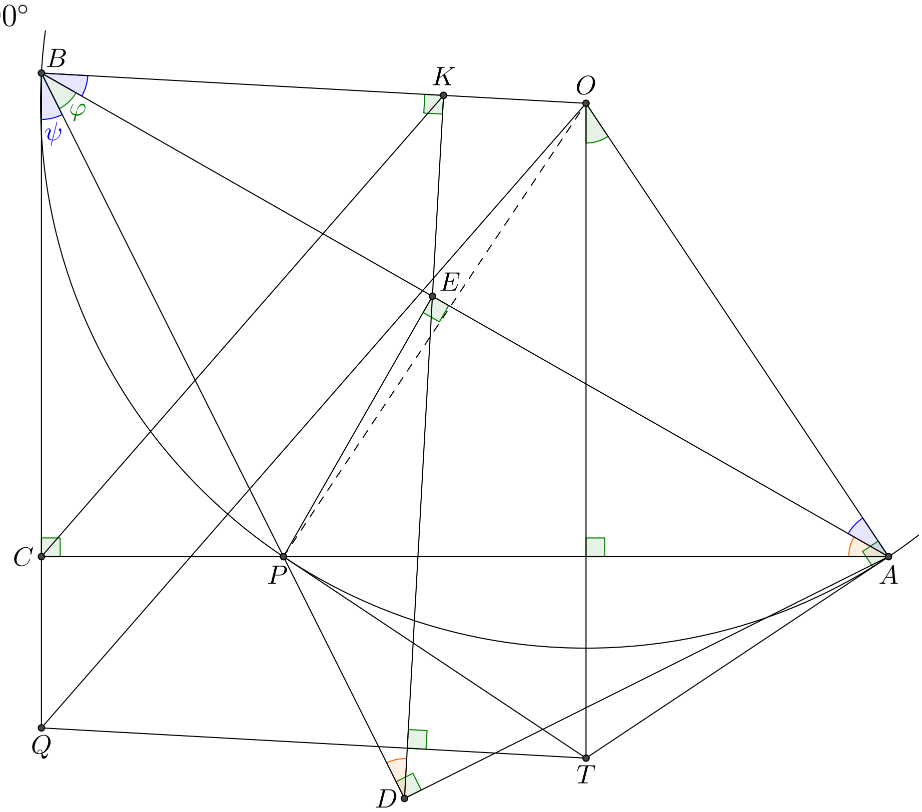
Следовательно,

$$\sqrt[4]{2a^2+a^2b}+\sqrt[4]{2b^2+b^2c}+\sqrt[4]{2c^2+c^2d}+\sqrt[4]{2d^2+d^2a} \leqslant \sqrt{4\cdot 4\sqrt{3}} = 4\sqrt[4]{3}.$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=d=1$.

4. На катете AC прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB отмечена точка P. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую BP, а точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону AB. На плоскости выбрана такая точка T, что прямые TA и TP являются касательными к описанной окружности треугольника PAB, точка O — центр этой окружности. Перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую DE, пересекает прямую BC в точке Q, а проходящая через точку C параллельная OQ прямая пересекает отрезок BO в точке K. Найдите угол $\angle OKE$.

Ответ: $90°$



Решение. Положим $\angle ABP = \varphi$ и $\angle CBP = \psi$. Треугольники AOT и POT равны по трем сторонам, а вписанный угол $\angle ABP$ опирается на ту же дугу, что и центральный угол $\angle AOP$, поэтому $\gamma = \angle ABP = \frac{1}{2}\angle AOP = \angle AOT$. Следовательно, $\frac{OA}{OT} = \cos\varphi$. Центральный угол $\angle AOB$ опирается на меньшую дугу AB, а вписанный угол $\angle APB$ опирается на большую дугу AB, поэтому $\angle APB + \frac{1}{2}\angle AOB = 180°$. Из равнобедренности треугольника AOB следует, что

$$\angle ABO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - (180° - \angle APB) = \angle APB - 90° = \angle PBC = \psi.$$

Поскольку $\angle ADP = 90^\circ = \angle AEP$, четырехугольник $ADPE$ вписанный, в частности, $\angle EAP = \angle EDP = \angle BDE$. Следовательно,

$$\angle BDE + \angle DBO = \angle BDE + \angle DBA + \angle ABO = \angle EAP + \angle AOT + \angle BAO = 90^\circ$$

и, значит, прямые DE и BO перпендикулярны, а прямые BO и QT параллельны. Точки O и T лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AP, поэтому прямые AP и OT перпендикулярны. Следовательно, прямые BC и OT параллельны и четырехугольник $BOTQ$ является параллелограммом, в частности, $BQ = OT$. По теореме Фалеса для параллельных прямых CK и OQ имеем $\frac{BK}{BC} = \frac{BO}{BQ} = \frac{OA}{OT} = \cos\varphi$. Стало быть,

$$BK = BC\cos\varphi = BP\cos\psi\cos\varphi = BE\cos\psi = BE\cos\angle EBK.$$

Таким образом, точка K — основание перпендикуляра, опущенного из E на прямую BO, значит, $\angle BKE = 90^\circ$.

5. В математическом кружке занимается m мальчиков и n девочек. У преподавателя есть mn карточек, на них написаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, mn, каждое по одному разу. Он раздает кружковцам по одной карточке (пока не закончатся карточки или кружковцы). В итоге у каждого кружковца на руках будет одна карточка или ни одной, если кому-то не хватило карточки. Для каждой пары мальчик–девочка посчитали сумму чисел на их карточках и выписали ее доску. При каких m и n числа на доске могут давать различные остатки от деления на mn?

Ответ: при $n = 1$ или при $m = 1$

Решение. Можно считать, что $m \leqslant n$. Если $m = 1$, то надо всем девочкам выдать по карточке, тогда мальчику ничего не достанется и такая раздача карточек удовлетворяет условию.

Пусть $m \geqslant 2$. В этом случае $mn \geqslant m + n$, поэтому каждый кружковец получит ровно одну карточку. Предположим, что существует требуемая раздача карточек. Пусть девочки получили карточки с числами a_1, a_2, $\ldots$, a_n, а мальчики получили карточки с числами b_1, b_2, $\ldots$, b_m, причем все эти числа различны. Поскольку суммы вида $a_i + b_j$ дают различные остатки от деления на mn и этих сумм в точности mn штук, они по одному разу дают всевозможные остатки от деления на mn. Заметим, что разности $a_i - b_j$ дают различные остатки от деления на mn и, значит, они дают всевозможные остатки от деления на mn. Действительно, если для каких-то индексов разности $a_i - b_j$ и $a_k - b_\ell$ дают одинаковые остатки от деления на mn, то $(a_i - b_j) - (a_k - b_\ell) = (a_i + b_\ell) - (a_k + b_j)$ делится на mn и, значит, суммы $a_i + b_\ell$ и $a_k + b_j$ дают одинаковые остатки от деления на mn, что невозможно. Итак, разности $a_i - b_j$ дают дают всевозможные остатки от деления на mn, но тогда среди этих остатков встречается ноль и, значит, для некоторых индексов $a_i = b_j$. Противоречие.

10–11 класс. Пятый вариант

1. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано целое число. Оказалось, что для всех k от 1 до n сумма чисел, стоящих в k-ом столбце, либо на один меньше, либо на два больше суммы чисел, стоящих в k-й строке. При каких n такое возможно?

Ответ: при n, делящихся на три

Решение. Пусть количество строк, сумма чисел в которых на один меньше, чем в столбцах с тем же номером, равно m. Тогда количество строк, сумма чисел в которых на два больше, чем в столбцах с тем же номером, равно $n - m$. Следовательно, сумма всех чисел, подсчитанная по строкам, на $2(n-m)-m$ отличается от суммы чисел, подсчитанной по столбцам. Стало быть, $2n = 3m$ и, значит, n делится на три.

Приведем пример нужной расстановки для n делящихся на три. При k от 1 до $n/3$ поставим единицы клетках, расположенных в пересечении строк с номерами $2k - 1$ и $2k$ со столбцом с номером $n - k + 1$, а остальные клетки заполним нулями. Описанная расстановка чисел для $n = 9$ приведена на рисунке, в пустых клетках стоят нули.

								1
								1
							1	
							1	
						1		
						1		

2. Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, для которых числа $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ — простые и $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = c^2 + 1$.

Ответ: $(1, 2, 3)$ и $(2, 1, 3)$.

Решение. Можно считать, что $a \geqslant b$. Тогда $c^2+1 = (a^2+1)(b^2+1) \leqslant (a^2+1)^2$, поэтому $c^2 < (a^2 + 1)^2$ и, значит, $c < a^2 + 1$. С другой стороны,

$$(c + a)(c - a) = (c^2 + 1) - (a^2 + 1) = b^2(a^2 + 1)$$

делится на $a^2 + 1$. Но $c - a < a^2 + 1$ и $c + a < 2(a^2 + 1)$, следовательно, $c + a = a^2 + 1$ и $c - a = b^2$. Поскольку $a = b = 1$ не удовлетворяют условиям задачи, простое число $a^2 + 1$ является нечетным. Таким образом, $c = a^2 - a + 1$ также нечетно и, значит, число $c^2 + 1$ четно. Но оно является произведением двух простых чисел $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$, поэтому $b^2 + 1 = 2$ и $b = 1$. Стало быть, $c - a = 1$, откуда $a + 1 = c = a^2 - a + 1$ и, значит, $a = 2$. Легко видеть, что тройка $a = 2$, $b = 1$ и $c = 3$ удовлетворяет условию задачи.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не меньше 8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)} + \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)} + \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)}.$$

Ответ: 1

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{a+b}{16} + \frac{a+c}{16} + \frac{a+d}{16} \geqslant$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} \cdot \frac{a+b}{16} \cdot \frac{a+c}{16} \cdot \frac{a+d}{16}} = \frac{a}{2}.$$

Следовательно,
$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} \geqslant \frac{a}{2} - \Big(\frac{a+b}{16} + \frac{a+c}{16} + \frac{a+d}{16}\Big) = \frac{5a}{16} - \frac{b+c+d}{16}.$$
Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что
$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)} + \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)} + \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)} \geqslant$$
$$\geqslant \Big(\frac{5a}{16} - \frac{b+c+d}{16}\Big) + \Big(\frac{5b}{16} - \frac{c+d+a}{16}\Big) + \Big(\frac{5c}{16} - \frac{d+a+b}{16}\Big) + \Big(\frac{5d}{16} - \frac{a+b+c}{16}\Big) =$$
$$= \frac{2(a+b+c+d)}{16} \geqslant 1.$$
Если $a = b = c = d = 2$, то сумма дробей из условия задачи равна 1, поэтому наименьшее значение выражения равно 1.

Второе решение. Положим для краткости
$$K = \frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)} + \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)} + \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)}$$
По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел
$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)},\ \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)},\ \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)},\ \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)} \text{ и}$$
$$a+d, \quad b+a, \quad c+b, \quad d+c$$
имеем
$$\big(2(a+b+c+d)\big)K = \big((a+d)+(b+a)+(c+b)+(d+c)\big)K \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{a^2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(b+c)(b+d)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(c+d)(c+a)}} + \frac{d^2}{\sqrt{(d+a)(d+b)}}\right)^2$$
Обозначим последнее выражение в скобках через L и оценим его по неравенству Коши–Буняковского для наборов
$$\frac{a^2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}},\quad \frac{b^2}{\sqrt{(b+c)(b+d)}},\quad \frac{c^2}{\sqrt{(c+d)(c+a)}},\quad \frac{d^2}{\sqrt{(d+a)(d+b)}} \quad \text{и}$$
$$\sqrt{(a+b)(a+c)},\quad \sqrt{(b+c)(b+d)},\quad \sqrt{(c+d)(c+a)},\quad \sqrt{(d+a)(d+b)}.$$
Тогда $LM \geqslant (a+b+c+d)^2$, где
$$M = \sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(b+c)(b+d)} + \sqrt{(c+d)(c+a)} + \sqrt{(d+a)(d+b)}$$
Таким образом,
$$K \geqslant \frac{L^2}{2(a+b+c+d)} \geqslant \frac{(a+b+c+d)^4}{2(a+b+c+d)M^2} = \frac{(a+b+c+d)^3}{2M^2}.$$
Наконец, по неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{(x+y)(x+z)} \leqslant \frac{(x+y)+(x+z)}{2}$, поэтому
$$M \leqslant \frac{2a+b+c}{2} + \frac{2b+c+d}{2} + \frac{2c+d+a}{2} + \frac{2d+a+b}{2} = 2(a+b+c+d).$$
Стало быть,
$$K \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b+c+d)^3}{\big(2(a+b+c+d)\big)^2} = \frac{a+b+c+d}{8} \geqslant 1.$$
Если $a = b = c = d = 2$, то $K = 1$, поэтому наименьшее значение K равно 1.

Третье решение. Положим для краткости

$$K = \frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)} + \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)} + \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)} + \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)}$$

По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел

$$\frac{a^4}{(a+b)(a+c)(a+d)}, \quad \frac{b^4}{(b+c)(b+d)(b+a)}, \quad \frac{c^4}{(c+d)(c+a)(c+b)}, \quad \frac{d^4}{(d+a)(d+b)(d+c)} \quad \text{и}$$
$$(a+c)(a+d), \quad (b+d)(b+a), \quad (c+a)(c+b), \quad (d+b)(d+c)$$

имеем

$$(a+b+c+d)^2 K = \big((a+c)(a+d) + (b+d)(b+a) + (c+a)(c+b) + (d+b)(d+c)\big) K \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{a^2}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^2}{\sqrt{b+c}} + \frac{c^2}{\sqrt{c+d}} + \frac{d^2}{\sqrt{d+a}} \right)^2$$

Обозначим последнее выражение в скобках через L и оценим его по неравенству Коши–Буняковского для наборов

$$\frac{a^2}{\sqrt{a+b}}, \quad \frac{b^2}{\sqrt{b+c}}, \quad \frac{c^2}{\sqrt{c+d}}, \quad \frac{d^2}{\sqrt{d+a}} \quad \text{и} \quad \sqrt{a+b}, \quad \sqrt{b+c}, \quad \sqrt{c+d}, \quad \sqrt{d+a}.$$

Тогда $LM \geqslant (a+b+c+d)^2$, где $M = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+d} + \sqrt{d+a}$. Таким образом,

$$K \geqslant \frac{L^2}{(a+b+c+d)^2} \geqslant \frac{1}{(a+b+c+d)^2} \cdot \frac{(a+b+c+d)^4}{M^2} = \left(\frac{a+b+c+d}{M} \right)^2.$$

По неравенству о средних для двух чисел $2\sqrt{x+y} \leqslant \frac{x+y+4}{2}$, поэтому

$$M \leqslant \frac{a+b+4}{4} + \frac{b+c+4}{4} + \frac{c+d+4}{4} + \frac{d+a+4}{4} = \frac{2s+16}{4},$$

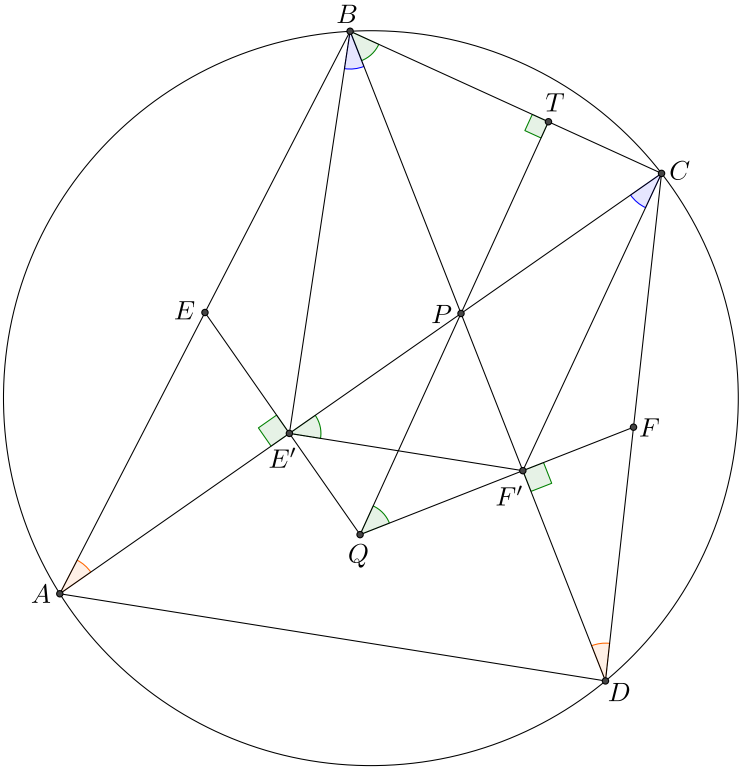
где $s = a+b+c+d \geqslant 8$. Итак, мы доказали, что

$$K \geqslant \left(\frac{s}{M} \right)^2 \geqslant \left(\frac{4s}{2s+16} \right)^2.$$

Осталось заметить, что $4s = 2s + 2s \geqslant 2s + 16$, поэтому последнее выражение не меньше 1. Если же $a = b = c = d = 2$, то $K = 1$, поэтому наименьшее значение K равно 1.

4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причем треугольник APD — остроугольный. Точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Из точки E провели перпендикуляр к прямой AC, а из точки F провели перпендикуляр к прямой BD, эти перпендикуляры пересеклись в точке Q. Найдите угол между прямыми PQ и BC.

Ответ: 90°

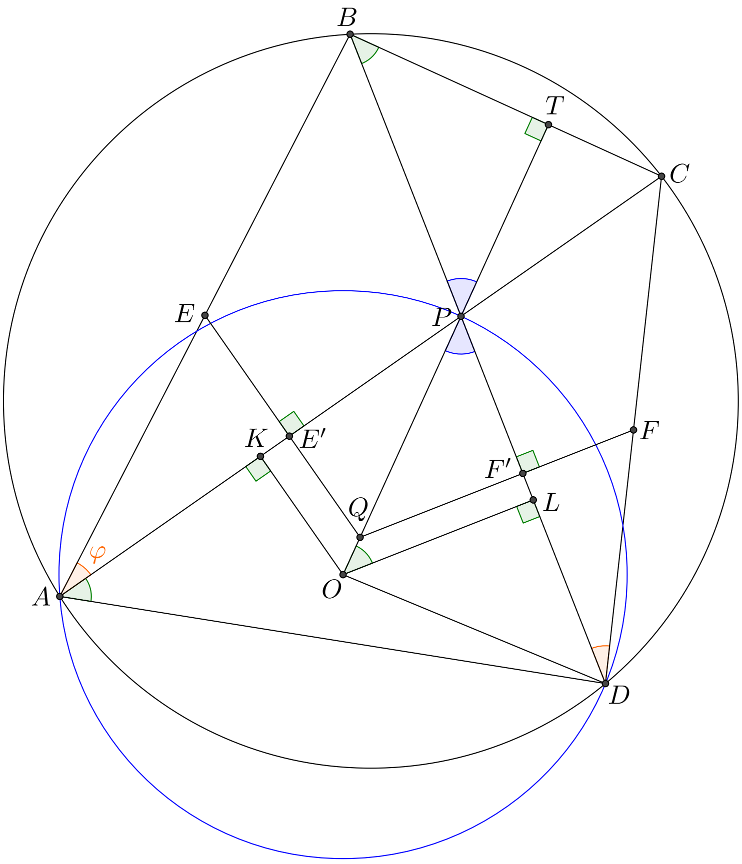


Первое решение. Пусть E' и F' — точки пересечения EQ с AP и FQ с DP соответственно, а T — точка пересечения прямых PQ и BC. Поскольку углы $\angle BAC$ и $\angle BDC$ опираются на одну дугу, они равны. Следовательно, прямоугольные треугольники $AE'E$ и $BF'F$ подобны. Тогда, $\frac{EE'}{FF'} = \frac{AE}{DF} = \frac{BE}{CF}$, последнее поскольку точки E и F — середины отрезков AB и CD. Кроме того $\angle BEE' = \angle CFF'$, поэтому треугольники BEE' и CFF' подобны и, в частности, $\angle ABE' = \angle DCF'$. Углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ опираются на одну дугу и поэтому равны. Таким образом, $\angle E'BF' = \angle ABD - \angle ABE' = \angle ACD - \angle DCF' = \angle E'CF'$. Следовательно, четырехугольник $BE'F'C$ вписанный и

$$\angle PBT = \angle CBF' = \angle CE'F' = \angle PEF' = \angle PQF'$$

(последнее равенство углов следует из вписанности четырехугольника $PE'QF'$). Осталось посчитать углы:

$$\angle PTB = 180^\circ - \angle PBT - \angle BPT = 180^\circ - \angle PQF' - \angle QPF' = 90^\circ.$$



Второе решение. Пусть E' и F' — точки пересечения EQ с AP и FQ с DP соответственно, точки K и L — середины отрезков AP и DP, а T — точка пересечения прямых PQ и BC. Пусть O — центр описанной окружности треугольника APD, тогда OK и OL — серединные перпендикуляры к отрезкам AP и DP соответственно. Положим для краткости $\angle BAP = \varphi$. Тогда $\angle CDP = \varphi$, поскольку углы $\angle BAP$ и $\angle CDP$ опираются на одну дугу. Следовательно, треугольники BAP и CDP подобны по двум углам и, значит,

$$\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{CD} = \frac{AE}{DF} = \frac{AE\cos\varphi}{DF\cos\varphi} = \frac{AE'}{DF'}.$$

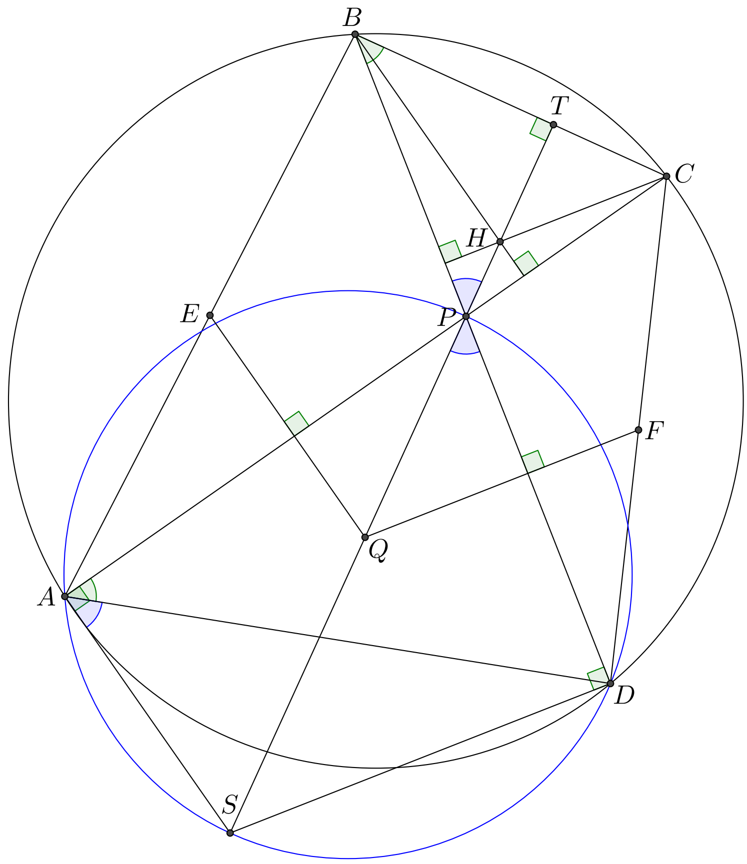
Таким образом,

$$\frac{PE'}{PF'} = \frac{AP - AE'}{DP - DF'} = \frac{AP}{DP} = \frac{PK}{PL}.$$

Пусть прямые KO и PQ пересекаются в точке K', а прямые LO и PQ пересекаются в точке L'. Тогда треугольники $PE'Q$ и PKK' подобны с коэффициентом $\frac{PE'}{PK} = \frac{PF'}{PL}$, с таким же коэффициентом подобия подобны и треугольники $PF'Q$ и PLL'. Следовательно, $PK' = PL'$ и, значит, точки K', L' и O совпадают. Таким образом, прямая PQ проходит через точку O. Осталось посчитать углы:

$$\angle PTB = 180^\circ - \angle CBD - \angle BPT = 180^\circ - \angle CAD - \angle OPD = 180^\circ - \angle POL - \angle OPD = 90^\circ.$$

В предпоследнем равенстве использовалось то, что центральный угол $\angle POD$ с одной стороны равен удвоенному вписанному углу $\angle CAD$, а с другой стороны равен удвоенному углу $\angle POL$.



Третье решение. Проведем из точки P прямую ℓ, перпендикулярную стороне BC, пусть T — ее точка пересечения с BC. Через точки A и D проведем прямые, перпендикулярные к диагоналям AC и BD соответственно. Пусть S их точка пересечения. Поскольку $\angle PAS = 90^\circ = \angle PDS$, точки A, P, D и S лежат на окружности с диаметром PS. Тогда (равенство $\angle DAP = \angle DBC$ следует из вписанности четырехугольника $ABCD$)

$$\angle DPS = \angle DAS = 90^\circ - \angle DAP = 90^\circ - \angle DBC = \angle BPT.$$

Следовательно, точка S лежит на прямой ℓ.

Пусть H — точка пересечения высот треугольника PBC. Ясно, что она также лежит на прямой ℓ. Тогда прямые AS, BH и EQ параллельны, и поскольку $AE = EB$, прямая EQ является средней линией трапеции $ABHS$. Следовательно, EQ пересекает прямую ℓ в середине отрезка SH. Аналогично прямая FQ также пересекает прямую ℓ в середине отрезка SH. Но тогда прямые EQ, FQ и ℓ пересекаются в середине отрезка SH и эта точка является точкой Q. Стало быть Q также лежит на прямой ℓ. В частности, прямые PQ и BC пересекаются под прямым углом.

5. В классе $n \geqslant 3$ школьников. У учителя есть $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ карточек, на них написаны числа $1, 2, 3, \ldots, m$, каждое по одному разу. Он раздал каждому школьнику по одной карточке. Для каждой пары школьников посчитали сумму чисел на их карточках и все полученные числа записали на доске. Оказалось, что числа на доске дают различные остатки от деления на m. Докажите, что если m четно, то n является квадратом натурального числа.

Решение. Занумеруем школьников числами от 1 до n. Пусть a_j — число, написанное на карточке у j-го школьника. Тогда все попарные суммы $a_i + a_j$ дают различные остатки от деления на $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. Пусть k из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются четными, а $n-k$ чисел нечетными. Тогда среди сумм $a_i + a_j$ нечетными будут в точности те, в которых складываются четное и нечетное числа. Таким образом, нечетных сумм будет в точности $k(n-k)$ штук. Поскольку m четно, это количество должно быть равно $\frac{1}{2}m$. Поэтому

$$2k(n-k) = m = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Тогда k является решением квадратного уравнения

$$4k^2 - 4nk + n(n-1) = 0.$$

Следовательно, его дискриминант

$$(4n)^2 - 4 \cdot 4 \cdot n(n-1) = 16n$$

является точным квадратом. Но тогда число n также является точным квадратом.

10–11 класс. Шестой вариант

1. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано натуральное число. Оказалось, что для всех k от 1 до n сумма чисел, стоящих в k-ом столбце, на единицу отличается от суммы чисел, стоящих в k-й строке. При каких n такое возможно?

Ответ: при четных n

Решение. Если n нечётно, то в таблице сумма всех чисел, подсчитанная по строкам, на нечётное число отличается от суммы чисел, подсчитанной по столбцам. Но это невозможно. В таблице с чётным n можно заполнить двойками верхнюю половину диагонали таблицы, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, а остальные клетки заполнить единицами. Описанная расстановка чисел для $n = 10$ приведена на рисунке.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1	2	1
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

2. Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, для которых числа $a^2 - 23$ и $b^2 - 23$ — простые и $(a^2 - 23)(b^2 - 23) = c^2 - 23$.

Ответ: $(5, 6, 7)$ и $(6, 5, 7)$.

Решение. Заметим, что $a, b \geqslant 5$. Если $a = b = 5$, то $c^2 - 23 = (a^2-23)(b^2-23) = 2\cdot 2 = 4$, что невозможно. Поэтому можно считать, что $a \geqslant b$ и $a \geqslant 6$. Тогда

$$c^2 - 23 = (a^2 - 23)(b^2 - 23) \leqslant (a^2 - 23)^2.$$

С другой стороны, $(c + a)(c - a) = (c^2 - 23) - (a^2 - 23)$ делится на $a^2 - 23$. Если $c - a$ делится на $a^2 - 23$, то $c - a \geqslant a^2 - 23$ и $c + a > c - a \geqslant a^2 - 23$, а, значит,

$$(a^2 - 23)^2 < (c + a)(c - a) = (c^2 - 23) - (a^2 - 23) \leqslant (a^2 - 23)^2,$$

что невозможно. Следовательно, $c + a$ делится на $a^2 - 23$. Если $c + a \geqslant 2(a^2 - 23)$, то

$$c \geqslant 2a^2 - a - 46 \geqslant a^2 + 6a - a - 46 = a^2 + 5a - 46 \geqslant a^2 + 5 \cdot 6 - 46 = a^2 - 16$$

и, значит,

$$a^4 - 46a^2 + 529 = (a^2 - 23)^2 \geqslant c^2 - 23 \geqslant (a^2 - 16)^2 - 23 = a^4 - 32a^2 + 233.$$

Таким образом, $296 \geqslant 14a^2 \geqslant 14 \cdot 6^2 = 504$, что невозможно. Следовательно, $c + a = a^2 - 23$ и $c - a = b^2 - 24$. Поскольку $a \geqslant 6$, простое число $a^2 - 23$ не меньше чем 13 и поэтому является нечетным. Таким образом, $c = a^2 - a - 23$ также нечетно и, значит, число $c^2 - 23$ четно. Но оно является произведением двух простых чисел $a^2 - 23$ и $b^2 - 23$, поэтому $b^2 - 23 = 2$ и $b = 5$. Стало быть, $c - a = b^2 - 24 = 1$, откуда $a + 1 = c = a^2 - a - 23$ и, значит, $a = 6$. Легко видеть, что тройка $a = 6$, $b = 5$ и $c = 7$ удовлетворяет условию задачи.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}+\frac{b^8}{(b^2+c)(b^2+d)(b^2+a)}+\frac{c^8}{(c^2+d)(c^2+a)(c^2+b)}+\frac{d^8}{(d^2+a)(d^2+b)(d^2+c)}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$

Первое решение. По неравенству о средних для четырех чисел имеем

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}+\frac{a^2+b}{16}+\frac{a^2+c}{16}+\frac{a^2+d}{16}\geqslant$$
$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}\cdot\frac{a^2+b}{16}\cdot\frac{a^2+c}{16}\cdot\frac{a^2+d}{16}}=\frac{a^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}\geqslant\frac{a^2}{2}-\Big(\frac{a^2+b}{16}+\frac{a^2+c}{16}+\frac{a^2+d}{16}\Big)=\frac{5a^2}{16}-\frac{b+c+d}{16}.$$

Просуммируем это неравенство с тремя аналогичными и получим, что

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}+\frac{b^8}{(b^2+c)(b^2+d)(b^2+a)}+\frac{c^8}{(c^2+d)(c^2+a)(c^2+b)}+\frac{d^8}{(d^2+a)(d^2+b)(d^2+c)}\geqslant$$
$$\geqslant\Big(\frac{5a^2}{16}-\frac{b+c+d}{16}\Big)+\Big(\frac{5b^2}{16}-\frac{c+d+a}{16}\Big)+\Big(\frac{5c^2}{16}-\frac{d+a+b}{16}\Big)+\Big(\frac{5d^2}{16}-\frac{a+b+c}{16}\Big)=$$
$$=\frac{5(a^2+b^2+c^2+d^2)}{16}-\frac{3(a+b+c+d)}{16}=\frac{5(a^2+b^2+c^2+d^2)}{16}-\frac{3}{4}\geqslant\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство верно, поскольку $4(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant(a+b+c+d)^2=16$, что проверяется, например, непосредственным раскрытием скобок.

Если $a=b=c=d=1$, то сумма дробей из условия задачи равна $\frac{1}{2}$, поэтому наименьшее значение выражения равно $\frac{1}{2}$.

Второе решение. Положим для краткости

$$K=\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)}+\frac{b^8}{(b^2+c)(b^2+d)(b^2+a)}+\frac{c^8}{(c^2+d)(c^2+a)(c^2+b)}+\frac{d^8}{(d^2+a)(d^2+b)(d^2+c)}$$

По неравенству Коши–Буняковского для наборов чисел

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)},\ \frac{b^8}{(b^2+c)(b^2+d)(b^2+a)},\ \frac{c^8}{(c^2+d)(c^2+a)(c^2+b)},\ \frac{d^8}{(d^2+a)(d^2+b)(d^2+c)}\quad\text{и}$$
$$a^2+d,\quad b^2+a,\quad c^2+b,\quad d^2+c$$

имеем

$$\big(a^2+b^2+c^2+d^2+4\big)K=\big((a^2+d)+(b^2+a)+(c^2+b)+(d^2+c)\big)K\geqslant$$
$$\geqslant\bigg(\frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b)(a^2+c)}}+\frac{b^4}{\sqrt{(b^2+c)(b^2+d)}}+\frac{c^4}{\sqrt{(c^2+d)(c^2+a)}}+\frac{d^4}{\sqrt{(d^2+a)(d^2+b)}}\bigg)^2$$

Обозначим последнее выражение в скобках через L и оценим его по неравенству Коши–Буняковского для наборов

$$\frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b)(a^2+c)}},\quad\frac{b^4}{\sqrt{(b^2+c)(b^2+d)}},\quad\frac{c^4}{\sqrt{(c^2+d)(c^2+a)}},\quad\frac{d^4}{\sqrt{(d^2+a)(d^2+b)}}\quad\text{и}$$
$$\sqrt{(a^2+b)(a^2+c)},\quad\sqrt{(b^2+c)(b^2+d)},\quad\sqrt{(c^2+d)(c^2+a)},\quad\sqrt{(d^2+a)(d^2+b)}.$$

Тогда $LM \geqslant \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$, где

$$M = \sqrt{(a^2+b)(a^2+c)} + \sqrt{(b^2+c)(b^2+d)} + \sqrt{(c^2+d)(c^2+a)} + \sqrt{(d^2+a)(d^2+b)}.$$

Таким образом,

$$K \geqslant \frac{L^2}{a^2+b^2+c^2+d^2+4} \geqslant \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2+4} \cdot \frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4}{M^2}.$$

Наконец, по неравенству о средних для двух чисел $\sqrt{(x^2+y)(x^2+z)} \leqslant \frac{(x^2+y)+(x^2+z)}{2}$, поэтому

$$M \leqslant \frac{2a^2+b+c}{2} + \frac{2b^2+c+d}{2} + \frac{2c^2+d+a}{2} + \frac{2d^2+a+b}{2} = a^2+b^2+c^2+d^2+4.$$

Стало быть,

$$K \geqslant \frac{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4}{(a^2+b^2+c^2+d^2+4)^3} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{\left(1+\frac{4}{a^2+b^2+c^2+d^2}\right)^3} = . \qquad (*)$$

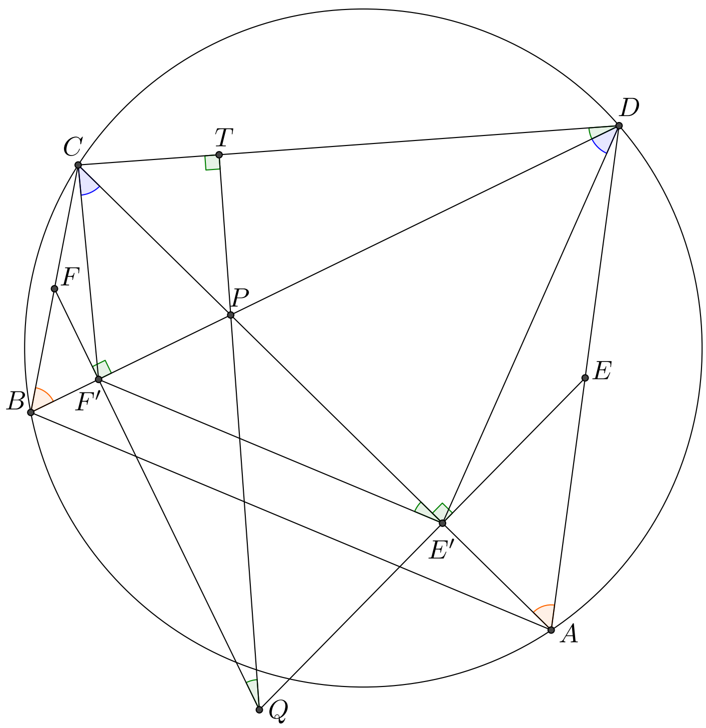
Осталось заметить, что по неравенству Коши–Буняковского для наборов a, b, c, d и 1, 1, 1, 1

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant (a+b+c+d)^2 = 16,$$

поэтому $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 4$. Следовательно, числитель в правой части $(*)$ не меньше, чем 4, а знаменатель не больше, чем 2^3, поэтому $K \geqslant \frac{1}{2}$. Если же $a=b=c=d=1$, то $K=\frac{1}{2}$, поэтому наименьшее значение K равно $\frac{1}{2}$.

4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причем угол APB — тупой. Точки E и F — середины сторон AD и BC соответственно. Из точки E провели перпендикуляр к прямой AC, а из точки F провели перпендикуляр к прямой BD, эти перпендикуляры пересеклись в точке Q. Найдите угол между прямыми PQ и CD.

Ответ: 90°

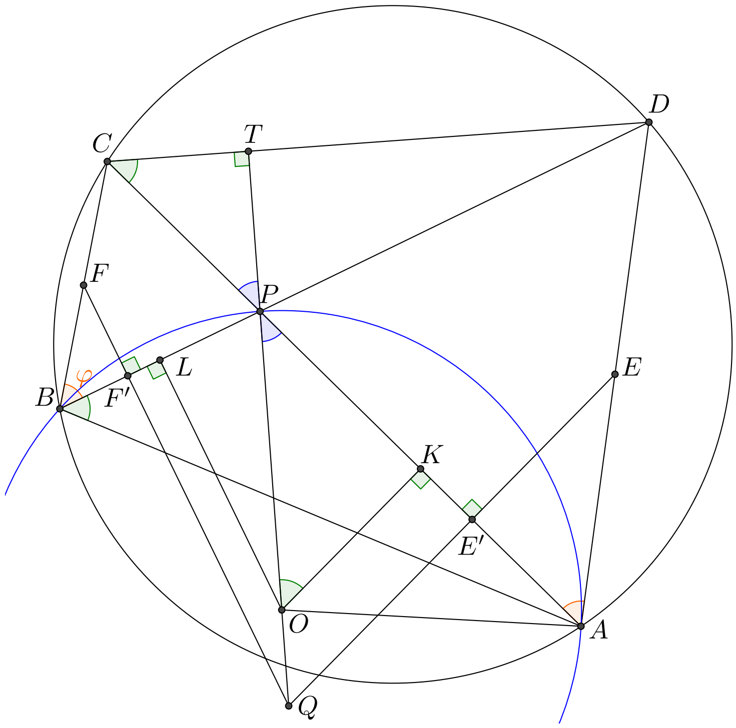


Первое решение. Пусть E' и F' — точки пересечения EQ с AP и FQ с BP соответственно, а T — точка пересечения прямых PQ и CD. Поскольку углы $\angle CAD$ и $\angle CBD$ опираются на одну дугу, они равны. Следовательно, прямоугольные треугольники $AE'E$ и $DF'F$ подобны. Тогда, $\frac{EE'}{FF'} = \frac{AE}{BF} = \frac{DE}{CF}$, последнее поскольку точки E и F — середины отрезков AD и BC. Кроме того $\angle DEE' = \angle CFF'$, поэтому треугольники DEE' и CFF' подобны и, в частности, $\angle ADE' = \angle BCF'$. Углы $\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на одну дугу и поэтому равны. Таким образом, $\angle E'BF' = \angle ABD - \angle ABE' = \angle ACD - \angle DCF' = \angle E'CF'$. Следовательно, четырехугольник $BE'F'C$ вписанный и

$$\angle TDP = \angle CDF' = \angle CE'F' = \angle PE'F' = \angle PQF'$$

(последнее равенство углов следует из вписанности четырехугольника $PE'QF'$). Осталось посчитать углы:

$$\angle PTD = 180^\circ - \angle TDP - \angle DPT = 180^\circ - \angle PQF' - \angle QPF' = 90^\circ.$$



Второе решение. Пусть E' и F' — точки пересечения EQ с AP и FQ с BP соответственно, точки K и L — середины отрезков AP и BP, а T — точка пересечения прямых PQ и CD. Пусть O — центр описанной окружности треугольника APB, тогда OK и OL — серединные перпендикуляры к отрезкам AP и BP соответственно. Положим для краткости $\angle DAP = \varphi$. Тогда $\angle CBP = \varphi$, поскольку углы $\angle DAP$ и $\angle CBP$ опираются на одну дугу. Следовательно, треугольники CBP и DAP подобны по двум углам и, значит,

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC} = \frac{AE}{BF} = \frac{AE\cos\varphi}{BF\cos\varphi} = \frac{AE'}{BF'}.$$

Таким образом,

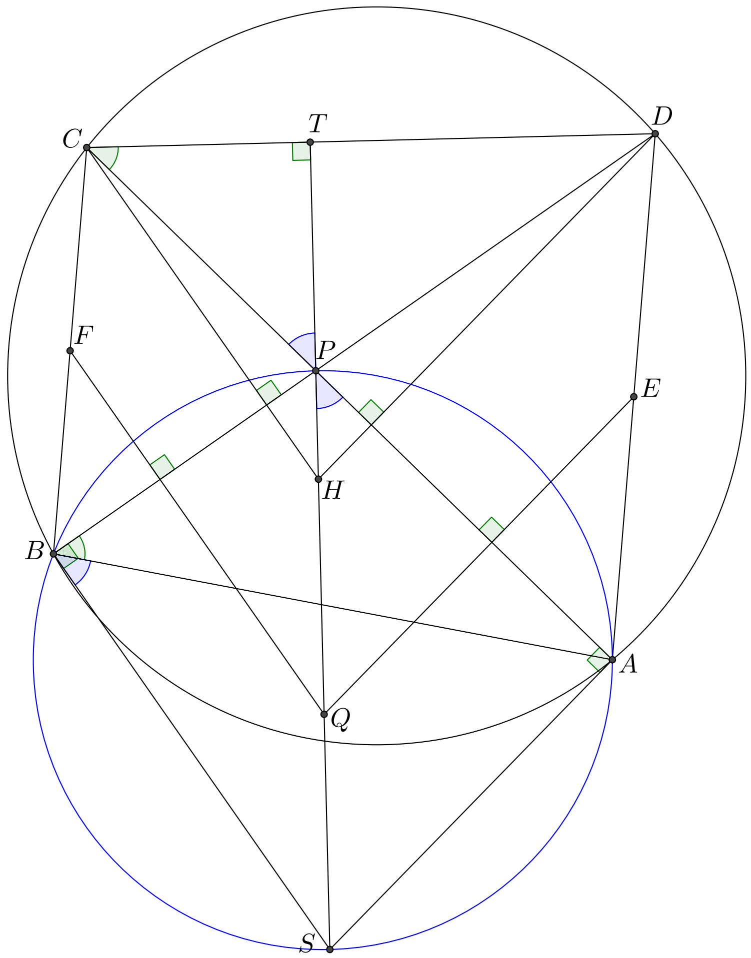
$$\frac{PE'}{PF'} = \frac{AP - AE'}{BP - BF'} = \frac{AP}{BP} = \frac{PK}{PL}.$$

Пусть прямые KO и PQ пересекаются в точке K', а прямые LO и PQ пересекаются в точке L'. Тогда треугольники $PE'Q$ и PKK' подобны с коэффициентом $\frac{PE'}{PK} = \frac{PF'}{PL}$, с таким же коэффициентом подобия подобны и треугольники $PF'Q$ и PLL'. Следовательно,

$PK' = PL'$ и, значит, точки K', L' и O совпадают. Таким образом, прямая PQ проходит через точку O. Осталось посчитать углы:

$$\angle PTC = 180^\circ - \angle ACB - \angle CPT = 180^\circ - \angle ABD - \angle APO = 180^\circ - \angle POK - \angle APO = 90^\circ.$$

В предпоследнем равенстве использовалось то, что центральный угол $\angle AOP$ с одной стороны равен удвоенному вписанному углу $\angle ABD$, а с другой стороны равен удвоенному углу $\angle POK$.



Третье решение. Проведем из точки P прямую ℓ, перпендикулярную стороне CD, пусть T — ее точка пересечения с CD. Через точки A и B проведем прямые, перпендикулярные к диагоналям AC и BD соответственно. Пусть S их точка пересечения. Поскольку $\angle PAS = 90^\circ = \angle PBS$, точки A, P, B и S лежат на окружности с диаметром PS. Тогда (равенство $\angle ABP = \angle ACD$ следует из вписанности четырехугольника $ABCD$)

$$\angle APS = \angle ABS = 90^\circ - \angle ABP = 90^\circ - \angle ACD = \angle CPT.$$

Следовательно, точка S лежит на прямой ℓ.

Пусть H — точка пересечения высот треугольника CPD. Ясно, что она также лежит на прямой ℓ. Тогда прямые AS, DH и EQ параллельны, и поскольку $AE = ED$, прямая EQ является средней линией трапеции $ADHS$. Следовательно, EQ пересекает прямую ℓ в середине отрезка SH. Аналогично прямая FQ также пересекает прямую ℓ в середине отрезка SH. Но тогда прямые EQ, FQ и ℓ пересекаются в середине отрезка SH и эта точка является точкой Q. Стало быть Q также лежит на прямой ℓ. В частности, прямые PQ и CD пересекаются под прямым углом.

5. В классе $n \geqslant 3$ школьников. У учителя есть $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ карточек, на них написаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, m, каждое по одному разу. Он раздал каждому школьнику по одной карточке. Для каждой пары школьников посчитали сумму чисел на их карточках и все полученные числа записали на доске. Оказалось, что числа на доске дают различные остатки от деления на m. Докажите, что если m нечетно, то $n-2$ является квадратом натурального числа.

Решение. Занумеруем школьников числами от 1 до n. Пусть a_j — число, написанное на карточке у j-го школьника. Тогда все попарные суммы $a_i + a_j$ дают различные остатки от деления на $m = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Рассмотрим остатки от деления на m у попарных разностей $a_i - a_j$ при различных i и j. Всего таких остатков $n(n-1)$, причем среди них нет нулевого остатка. Предположим, что для каких-то индексов они совпадают. Тогда $a_i - a_j \equiv a_k - a_\ell \pmod{m}$ и поэтому $a_i + a_\ell \equiv a_j + a_k \pmod{m}$. Такое возможно только когда $i = \ell$ или $j = k$. Если, например, $i = \ell$, то

$$2a_i \equiv a_j + a_k \pmod{m}, \qquad (*)$$

причем $j \neq k$, поскольку m — нечетно. Сравнение $(*)$ возможно не более чем в n случаях, поскольку индекс i может принимать лишь n значений, а суммы вида $a_j + a_k$ принимают каждый остаток от деления на m ровно один раз. Одному сравнению $(*)$ соответствует два совпадения остатков разностей: у $a_i - a_j$ и $a_k - a_i$, а также у $a_j - a_i$ и $a_i - a_k$.

Поскольку попарных разностей $n(n-1)$, а ненулевых остатков от деления на m всего $m - 1 = \frac{1}{2}n(n-1) - 1$ и не более чем $2n$ из них встречается два раза, имеем неравенство $\frac{1}{2}n(n-1) - 1 + 2n \geqslant n(n-1)$ и, значит, $n(n-1) \leqslant 4n - 2 < 4n$. Таким образом, $n < 5$. Стало быть, $n = 3$ и тогда $n-2$ — точный квадрат.