Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2022/2023 учебный год

6–7 класс. Первый вариант

1. Натуральные числа x и y не делятся на 59, а число $3x + 28y$ — делится. Докажите, что $5x + 16y$ не делится на 59.

Решение. Допустим, что $5x + 16y$ делится на 59. Тогда число

$$3 \cdot (3x + 28y) + 10 \cdot (5x + 16y) = 59x + 244y$$

тоже делится на 59. Следовательно, $244y$ делится на 59. А так как 244 и 59 взаимно просты, то и y делится на 59, чего не может быть по условию.

Можно было подобрать и другие равенства, например $5\cdot(3x+28y)-3\cdot(5x+16y) = 92y$, или вообще запустить алгоритм Евклида.

2. В мешке лежит 21 обычный кубик, на гранях каждого написаны числа от 1 до 6. Все кубики пронумерованы. Зритель берет из мешка 3 кубика, показывает их фокуснику и один кубик кладет в карман. Фокусник кладет два оставшихся кубика на стол. Зритель записывает числа на верхних гранях кубиков (в каком именно порядке — он выбирает сам) и сообщает их второму фокуснику. А тот называет номер кубика в кармане у зрителя. Как заранее договориться фокусникам, чтобы фокус удался?

Решение. Зритель сообщает второму фокуснику два числа, каждое от 1 до 6, причем порядок, в котором сообщаются числа, не несет никакой информации. Всего существует 21 пара таких чисел:

11	12	13	14	15	16
	22	23	24	25	26
		33	34	35	36
			44	45	46
				55	56
					66

Фокусники должны заранее пронумеровать эти пары числами от 1 до 21, и когда первый фокусник увидит номер кубика, который зритель кладет в карман, он должен выложить с помощью кубиков соответствующую пару чисел.

3. Можно ли в вершинах куба расставить 8 различных чисел из диапазона от 1 до 220 так, чтобы числа в соседних вершинах имели общий делитель больше 1, а в несоседних не имели бы?

Ответ: нет.

Решение. Для каждых двух чисел, соединенных ребром, напишем на этом ребре их общий простой делитель (любой, если есть выбор). Тогда на разных ребрах будут написаны разные простые числа. Действительно, если бы на двух ребрах оказалось написано число p, то любые два числа в вершинах этих ребер делятся на p и поэтому должны быть соединены ребром, в частности найдутся три вершины, попарно соединенные ребрами. Но этого не может быть, потому что никакие три ребра куба не образуют треугольник.

Наименьшие 12 простых чисел — это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Значит, на одном из ребер куба должно быть написано число $p \geqslant 37$. Пусть A — любая из двух вершин этого ребра. Из нее выходит еще два ребра, произведение чисел на них не меньше $2 \cdot 3 = 6$, значит, число, написанное в A, не меньше $6 \cdot 37 = 222$. Противоречие.

4. На схеме лабиринта на рис. 1 каждый отрезок (звено) — это коридор, а кружочек — небольшая комната. В некоторых комнатах стоят маяки, они жужжат — каждый своим голосом. Находясь в любой комнате, робот слышит сигнал каждого маяка и по затуханию определяет расстояние до него, т. е. количество звеньев на кратчайшем пути к маяку. Например, если маяк находится в комнате A (в шахматных обозначениях это комната в4), а робот в комнате B (это комната г4), расстояние между ними — 7 звеньев. Схема лабиринта у робота есть и маяки на ней указаны. Для какого наименьшего числа маяков робот, оказавшись в любой комнате, сможет на слух однозначно определить, где он находится?

а) Укажите, как можно расставить такое количество маяков. Почему робот сумеет по ним определить свою комнату?

б) Докажите, что нельзя обойтись меньшим числом маяков.

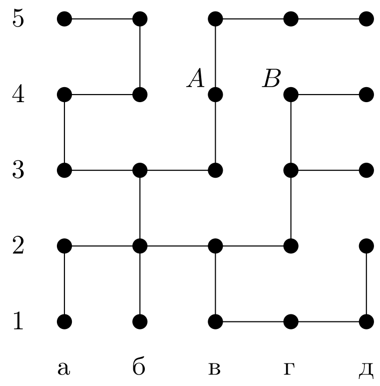

Рис. 1: Лабиринт

Ответ: наименьшее число маяков равно 3, например, их можно поставить в комнаты а1, д3, а5.

Решение.

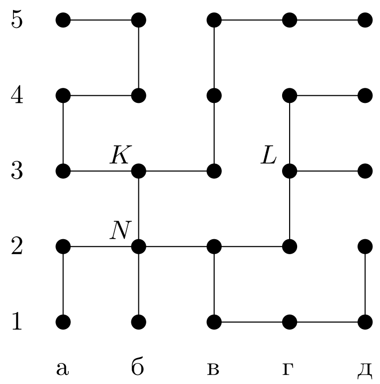

Рис. 2: Части лабиринта

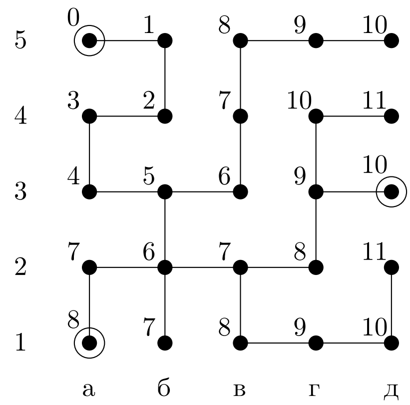

Рис. 3: Расстояния до маяка а5

б) Оценка. Докажем, что двух маяков не хватит. Рассмотрим три части нашего лабиринта (рис. 2): часть $\mathcal{K}$ — это комната K и два длинных тупиковых коридора, которые выходят из нее влево и вправо, часть $\mathcal{L}$ — это комната L и два тупиковых коридора, которые выходят из нее вверх и вправо, часть $\mathcal{N}$ — это комната N и два тупиковых коридора, которые выходят из нее влево и вниз. Если маяков не больше 2, то в какой-то из этих частей нет маяка. Пусть для примера это будет часть $\mathcal{K}$, сигналы от маяков приходят в эту часть по звену, входящему в комнату K снизу. Тогда робот, находясь в комнате а3, будет слышать такие же сигналы, как и в комнате в3, и поэтому не сможет различить, в которой из этих двух комнат находится. Аналогично подбираются неразличимые комнаты в других частях, если те не содержат маяка.

а) Пример. Проверим, что маяки в комнатах а1, д3, а5 позволят роботу сориентироваться в этом лабиринте. Здесь проще выполнить перебор вариантов, чем придумывать какие-то общие соображения. На рисунке 3 мы отметили расстояния от всех комнат до маяка а5. Как видим, комнаты с расстояниями от 0 до 5 определены однозначно. Комнаты с расстоянием 6 находятся на разном расстоянии от маяка д3. Аналогично комнаты с расстоянием 8, 9, 10, 11. Что касается четырех комнат с расстоянием 7, две из них — в2 и в4 — находятся на расстоянии 3 и 7 от маяка д3 и тем самым однозначно задаются расстояниями до а5 и до д3. У других двух комнат — а2 и б1 — расстояние до д3 равно 5, но они находятся на разном расстоянии от а1.

5. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют числа 1, 2, 3... Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах (см. рис. 4). Верно ли, что в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на 52?

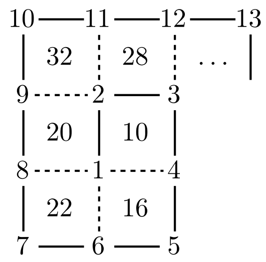

Рис. 4: Числа по спирали

Ответ: да, верно.

Решение. Клетки плоскости образуют спираль, состоящую из прямолинейных «коридоров», поворачивающих под прямыми углами.

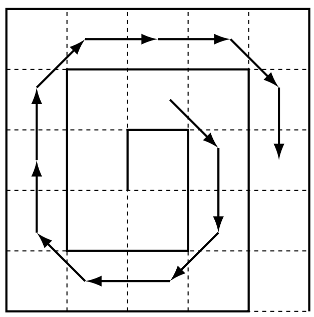

Рис. 5: Движемся по спирали

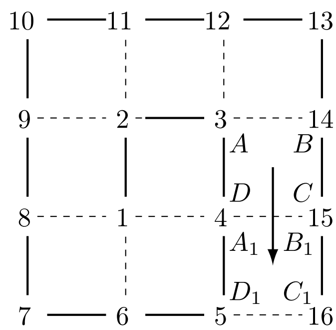

Рис. 6: Вертикальный шаг

Л е м м а. Если двигаться по маршруту, показанному стрелками на рис. 5, числа в клетках возрастают: при каждом вертикальном или горизонтальном перемещении по стрелке на рис. 5 число в клетке увеличивается на 4, а при диагональном перемещении — на 8.

Доказательство. Это сразу следует из правила расстановки чисел по спирали. Например рассмотрим первый вертикальный шаг из клетки $ABCD$ в клетку $A_1B_1C_1D_1$, см. рис. 6 (остальные вертикальные и горизонтальные шаги аналогичны). В наших обозначениях D и A_1 — это один и тот же узел, C и B_1 — тоже, зато удобно сравнивать числа в узлах клеток. Тогда число в узле A_1 на 1 больше, чем число в узле A, число в узле B_1 на 1 больше, чем число в узле B и т. д. В результате сумма чисел в узлах нижней клетки на 4 больше, чем в узлах верхней. Аналогичное явление наблюдается при выполнении диагонального шага.

Поскольку в первой клетке маршрута, указанного на рис. 5, стоит число, делящееся на 4 (это число 28, см. рисунок к условию задачи), все числа в клетках маршрута делятся на 4.

Пройдем далеко по спирали, чтобы очередной прямолинейный коридор спирали содержал больше 15 клеток. Тогда в неугловых клетках стоят последовательные кратные 4 и этих чисел не меньше 13, значит, среди них заведомо найдется число, делящееся на 52. Таким образом, в каждом длинном прямолинейном коридоре спирали найдется число, кратное 52.

6–7 класс. Второй вариант

1. Натуральные числа x и y не делятся на 61, а число $7x + 34y$ — делится. Докажите, что $5x + 16y$ не делится на 61.

Решение. Допустим, что $5x + 16y$ делится на 61. Тогда число

$$3 \cdot (7x + 34y) + 8 \cdot (5x + 16y) = 61x + 230y$$

тоже делится на 61. Следовательно, $230y$ делится на 61. А так как 230 и 61 взаимно просты, то и y делится на 61, чего не может быть по условию.

Можно было подобрать и другие равенства, например $5 \cdot (7x+34) - 7 \cdot (5x+16y) = 58y$, или вообще запустить алгоритм Евклида.

2. В коробке лежит 23 обычных кубика, на гранях каждого написаны числа от 1 до 6. Зритель берет из коробки несколько кубиков (можно даже все, но обязательно не меньше трех кубиков), показывает их фокуснику, два кубика отдает фокуснику, а остальные кубики кладет в карман. Фокусник кладет два оставшихся кубика на стол. Зритель записывает числа на верхних гранях кубиков (в каком именно порядке — он выбирает сам) и сообщает их второму фокуснику. А тот называет, сколько кубиков лежит в кармане у зрителя. Как заранее договориться фокусникам, чтобы фокус удался?

Решение. Зритель сообщает второму фокуснику два числа, каждое от 1 до 6, причем порядок, в котором сообщаются числа, не несет никакой информации. Всего существует 21 пара таких чисел:

11	12	13	14	15	16
	22	23	24	25	26
		33	34	35	36
			44	45	46
				55	56
					66

Количество кубиков в кармане зрителя — это число от 1 до 21. Фокусники должны заранее пронумеровать эти пары числами от 1 до 21, и когда первый фокусник увидит, сколько кубиков зритель кладет в карман, он должен выложить с помощью кубиков соответствующую пару чисел.

3. Можно ли в вершинах куба расставить 8 различных нечетных чисел из диапазона от 1 до 600 так, чтобы числа в соседних вершинах имели общий делитель больше 1, а в несоседних не имели бы?

Ответ: нет.

Решение. Для каждых двух чисел, соединенных ребром, напишем на этом ребре их общий простой делитель (любой, если есть выбор). Тогда на разных ребрах будут написаны разные простые числа. Действительно, если бы на двух ребрах оказалось написано число p, то любые два числа в вершинах этих ребер делятся на p и поэтому должны быть соединены ребром, в частности, найдутся три ребра, попарно соединенные ребрами. Но этого не может быть, потому что никакие три ребра куба не образуют треугольник.

Наименьшие 12 нечетных простых чисел — это 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41. Значит, на одном из ребер куба должно быть написано число $p \geqslant 41$. Пусть A — любая из двух вершин этого ребра. Из нее выходит еще два ребра, произведение чисел на них не меньше $3 \cdot 5 = 15$, значит, число, написанное в A, не меньше $15 \cdot 41 = 615$. Противоречие.

4. На схеме лабиринта на рис. 7 каждый отрезок (звено) — это коридор, а кружочек — небольшая комната. В некоторых комнатах стоят маяки, они жужжат — каждый своим голосом. Находясь в любой комнате, робот слышит сигнал каждого маяка и по затуханию определяет расстояние до него, т. е. количество звеньев на кратчайшем пути к маяку. Например, если маяк находится в комнате A (в шахматных обозначениях это комната в4), а робот в комнате B (это комната г4), расстояние между ними — 5 звеньев. Схема лабиринта у робота есть и маяки на ней указаны. Для какого наименьшего числа маяков робот, оказавшись в любой комнате, сможет на слух однозначно определить, где он находится?

а) Укажите, как можно расставить такое количество маяков. Почему робот сумеет по ним определить свою комнату?

б) Докажите, что нельзя обойтись меньшим числом маяков.

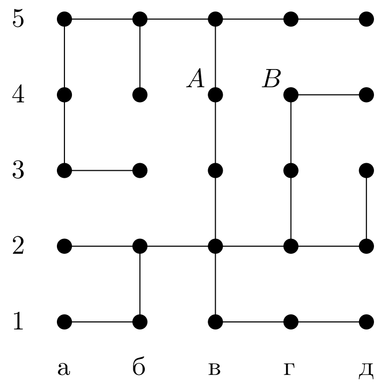

Рис. 7: Лабиринт

Ответ: наименьшее число маяков равно 3, например, их можно поставить в комнаты а1, б3, д4.

Решение.

б) Оценка. Докажем, что двух маяков не хватит. Рассмотрим три части нашего лабиринта (рис. 8): часть $\mathcal{K}$ — это комната K, длинный тупиковый коридор, который выходит из нее влево, и тупиковый коридор вниз, часть $\mathcal{L}$ — это комната L и два тупиковых коридора, которые выходят из нее вверх и вправо, часть $\mathcal{N}$ — это комната N и два тупиковых коридора, которые выходят из нее влево и вниз. Если маяков не больше 2, то в какой-то из этих частей нет маяка. Пусть для примера это будет часть $\mathcal{K}$, сигналы от маяков приходят в эту часть по звену, входящему в комнату K справа. Тогда робот, находясь в комнате а5, будет слышать такие же сигналы, как и в комнате б4, и поэтому не сможет различить,

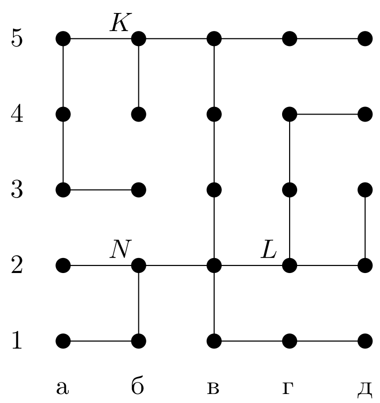

Рис. 8: Части лабиринта

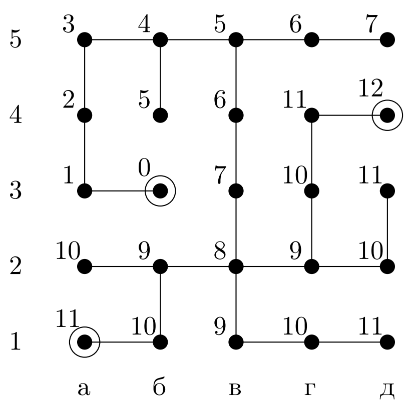

Рис. 9: Расстояния до маяка б3

в которой из этих двух комнат находится. Аналогично подбираются неразличимые комнаты в других частях, если те не содержат маяка.

а) Пример. Проверим, что маяки в комнатах а1, б3, д4 позволят роботу сориентироваться в этом лабиринте. Здесь проще выполнить перебор вариантов, чем придумывать какие-то общие соображения. На рисунке 9 мы отметили расстояния от всех комнат до маяка б3. Как видим, комнаты с расстояниями 0, 1, 2, 3, 4, 8 и 12 определены однозначно. Комнаты с расстоянием 5 находятся на разном расстоянии от маяка а1. Аналогично комнаты с расстоянием 6 и 7. Имеется три комнаты с расстоянием 9: одна из них — б2 — находится на расстоянии 2 от маяка а1, а остальные две — на расстоянии 4 от а1, но они имеют разные расстояния до д4. Две комнаты с расстоянием 10 — д2 и г3 — находятся на расстояниях 4 и 2 от маяка д4, а три другие — б1, а2 и г1 — на расстоянии 6 от д4, но на разных расстояниях от а1. Наконец, две комнаты с расстоянием 11 — д3 и г4 — находятся на расстояниях 5 и 1 от маяка д4, а две другие — а1 и д1 — на расстоянии 7 от д4, но на разных расстояниях от а1.

5. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют числа 0, 1, 2, 3... Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах (см. рис. 10). Верно ли, что в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на 68? Верно ли, что в центрах клеток числа не повторяются?

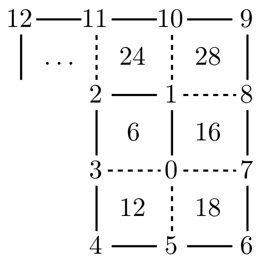

Рис. 10: Числа по спирали

Ответ: да, верно.

Решение. Клетки плоскости образуют спираль, состоящую из прямолинейных «коридоров», поворачивающих под прямыми углами.

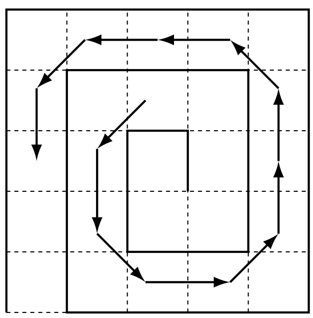

Рис. 11: Движемся по спирали

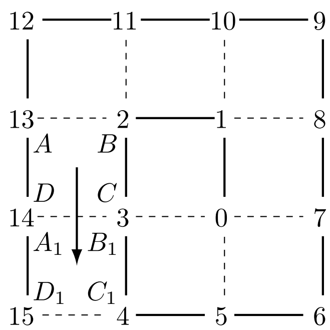

Рис. 12: Вертикальный шаг

Л е м м а. Если двигаться по маршруту, показанному стрелками на рис. 11, числа в клетках возрастают: при каждом вертикальном или горизонтальном перемещении по стрелке на рис. 11 число в клетке увеличивается на 4, а при диагональном перемещении — на 8.

Доказательство. Это сразу следует из правила расстановки чисел по спирали. Например рассмотрим первый вертикальный шаг из клетки $ABCD$ в клетку $A_1B_1C_1D_1$, см. рис. 12 (остальные вертикальные и горизонтальные шаги аналогичны). В наших обозначениях D и A_1 — это один и тот же узел, C и B_1 — тоже, зато удобно сравнивать числа в узлах клеток. Тогда число в узле A_1 на 1 больше, чем число в узле A, число в узле B_1 на 1 больше, чем число в узле B и т. д. В результате сумма чисел в узлах нижней клетки на 4 больше, чем в узлах верхней. Аналогичное явление наблюдается при выполнении диагонального шага.

Поскольку в первой клетке маршрута, указанного на рис. 11, стоит число, делящееся на 4 (это число 24, см. рисунок к условию задачи), все числа в клетках маршрута делятся на 4. Пройдем далеко по спирали, чтобы очередной прямолинейный коридор спирали содержал больше 19 клеток. Тогда в неугловых клетках стоят последовательные кратные 4 и этих чисел не меньше 17, значит, среди них заведомо найдется число, делящееся на 68. Таким образом, в каждом длинном прямолинейном коридоре спирали найдется число, кратное 68.

6–7 класс. Третий вариант

1. Натуральные числа x и y не делятся на 67, а число $7x + 32y$ — делится. Докажите, что $10x + 17y + 1$ не делится на 67.

Решение. По условию число $11(7x+32y) = 77x+352y$ делится на 67, тогда $10x+17y = 77x+352y-67x-5\cdot 67y$ тоже делится на 67. Поэтому число на 1 большее на 67 не делится.

2. В сейфе хранится 20 кошельков, в каждом лежат монеты в 1, 2, 5 и 10 рублей. Кошельки пронумерованы. Зритель берет из сейфа 4 кошелька, показывает их фокуснику и один кошелек кладет в карман. Фокусник берет из каждого из трех оставшихся кошельков по одной монете, дает их зрителю и тот кладет их на стол (как считает нужным). Приглашают второго фокусника, он смотрит на монетки на столе и называет номер кошелька в кармане у зрителя. Как заранее договориться фокусникам, чтобы фокус удался? Как показать такой фокус?

Решение. Второй фокусник видит номиналы трех лежащих монет, но ни их порядок, ни расположение на столе, ни стороны монет («орел», «решка») не несут никакой информации, поскольку монеты выкладывал зритель. Всего существует 20 троек монет:

1 1 1	2 2 2	5 5 5	10 10 10
1 2 5	1 2 10	1 5 10	2 5 10
1 1 2	1 1 5	1 1 10	
2 2 1	2 2 5	2 2 10	
5 5 1	5 5 2	5 5 10	
10 10 1	10 10 2	10 10 5	

Номер кошелька в кармане зрителя — это число от 1 до 20. Фокусники должны заранее пронумеровать эти тройки числами от 1 до 20, и когда первый фокусник увидит номер кошелька, который зритель кладет в карман, он должен достать из своих кошельков соответствующие три монеты.

3. Можно ли в вершинах куба расставить 8 различных чисел, не делящихся на 13, из диапазона от 1 до 245 так, чтобы числа в соседних вершинах имели общий делитель больше 1, а в несоседних не имели бы?

Ответ: нет.

Решение. Для каждых двух чисел, соединенных ребром, напишем на этом ребре их общий простой делитель (любой, если есть выбор). Тогда на разных ребрах будут написаны разные простые числа. Действительно, если бы на двух ребрах оказалось написано число p, то любые два числа в вершинах этих ребер делятся на p и поэтому должны быть соединены ребром, в частности, найдутся три ребра, попарно соединенные ребрами. Но этого не может быть, потому что никакие три ребра куба не образуют треугольник.

Наименьшие 12 простых чисел, не равных 13 — это 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41. Значит, на одном из ребер куба должно быть написано число $p \geqslant 41$. Пусть A — любая из двух вершин этого ребра. Из нее выходит еще два ребра, произведение чисел на них не меньше $2\cdot 3 = 6$, значит, число, написанное в A, не меньше $6\cdot 41 = 246$. Противоречие.

4. На схеме лабиринта на рис. 13 каждый отрезок (звено) — это коридор, а кружочек — небольшая комната. В некоторых комнатах стоят маяки, они жужжат — каждый своим голосом. Находясь в любой комнате, робот слышит сигнал каждого маяка и по затуханию определяет расстояние до него, т. е. количество звеньев на кратчайшем пути к маяку. Например, если маяк находится в комнате A (в шахматных обозначениях это комната в4), а робот в комнате B (это комната г4), расстояние между ними — 5 звеньев. Схема лабиринта у робота есть и маяки на ней указаны. Для какого наименьшего числа маяков робот, оказавшись в любой комнате, сможет на слух однозначно определить, где он находится?

а) Укажите, как можно расставить такое количество маяков. Почему робот сумеет по ним определить свою комнату?

б) Докажите, что нельзя обойтись меньшим числом маяков.

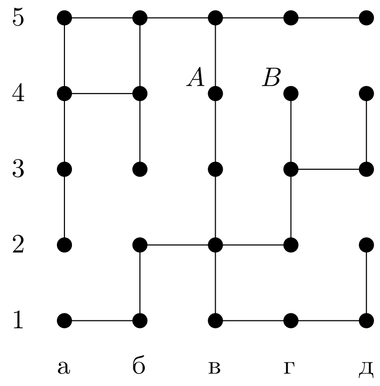

Рис. 13: Лабиринт

Ответ: наименьшее число маяков равно 3, например, их можно поставить в комнаты а1, б3, д4.

Решение.

б) Оценка. Докажем, что двух маяков не хватит. Рассмотрим три части нашего лабиринта (рис. 14): часть $\mathcal{K}$ — это комната K и тупиковые коридоры, который выходит из нее вправо и вниз, часть $\mathcal{L}$ — это комната L и два тупиковых коридора, которые выходят из нее вверх и вправо, часть $\mathcal{N}$ — это комната N и два тупиковых коридора, которые выходят из нее влево и вниз. Если маяков не больше 2, то в какой-то из этих частей нет маяка. Пусть для примера это будет часть $\mathcal{K}$, сигналы от маяков приходят в эту часть по звену, входящему в комнату K справа. Тогда робот, находясь в комнате а3, будет слышать такие же сигналы, как и в комнате б4, и поэтому не сможет различить, в которой из этих двух комнат находится. Аналогично подбираются неразличимые комнаты в других частях, если те не содержат маяка.

а) Пример. Проверим, что маяки в комнатах а1, б3, д4 позволят роботу сориентироваться в этом лабиринте. Здесь проще выполнить перебор вариантов, чем придумывать какие-то общие соображения. На рисунке 15 мы отметили расстояния от всех комнат до маяка б3. Как видим, комнаты с расстояниями 0, 1, 2, 5 и 8 определены однозначно. Комнаты с расстоянием 3 находятся на разном расстоянии от маяка а1. Аналогично комнаты с расстоянием 4, 6 и 7. Имеется три комнаты с расстоянием 9: одна из них — б2 — находится на расстоянии 2 от маяка а1, а остальные две — на расстоянии 4 от а1, но они имеют раз-

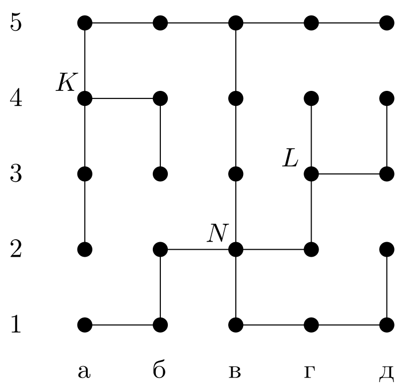

Рис. 14: Части лабиринта

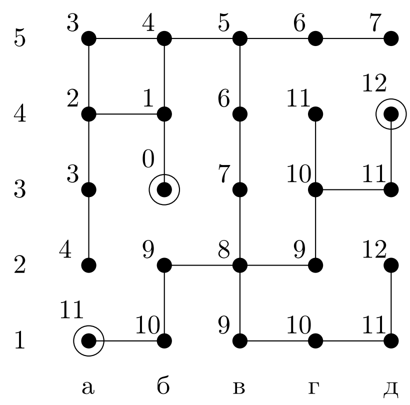

Рис. 15: Расстояния до маяка б3

ные расстояния до д4. Две комнаты с расстоянием 10 — г1 и г3 — находятся на расстоянии 5 от маяка а1, но различаются расстоянием до д4, а еще одна — б1 — на расстоянии 1 от а1 и этим она отличается от предыдущих двух. Две комнаты с расстоянием 11 — д3 и г4 — находятся на расстояниях 1 и 3 от маяка д4, а две другие — а1 и д1 — на расстоянии 7 от д4, но на разных расстояниях от а1. Наконец, комнаты с расстоянием 12 различаются расстоянием до д4.

5. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют последовательные натуральные числа 2, 3, 4, 5... Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах (см. рис. 16). Верно ли, что в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на 76?

Верно ли, что в центрах клеток числа не повторяются?

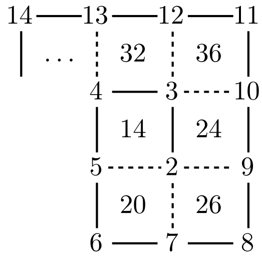

Рис. 16: Числа по спирали

Ответ: да, верно.

Решение. Клетки плоскости образуют спираль, состоящую из прямолинейных «коридоров», поворачивающих под прямыми углами.

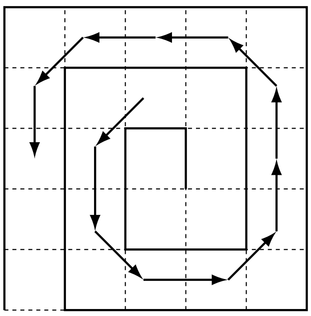

Рис. 17: Движемся по спирали

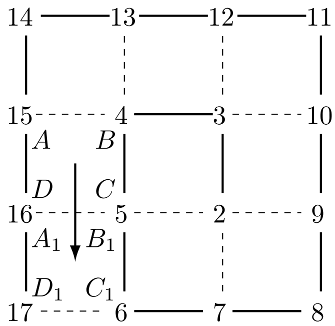

Рис. 18: Вертикальный шаг

Л е м м а. Если двигаться по маршруту, показанному стрелками на рис. 17, числа в клетках возрастают: при каждом вертикальном или горизонтальном перемещении по стрелке на рис. 17 число в клетке увеличивается на 4, а при диагональном перемещении — на 8.

Доказательство. Это сразу следует из правила расстановки чисел по спирали. Например рассмотрим первый вертикальный шаг из клетки $ABCD$ в клетку $A_1B_1C_1D_1$, см. рис. 18 (остальные вертикальные и горизонтальные шаги аналогичны). В наших обозначениях D и A_1 — это один и тот же узел, C и B_1 — тоже, зато удобно сравнивать числа в узлах клеток. Тогда число в узле A_1 на 1 больше, чем число в узле A, число в узле B_1 на 1 больше, чем число в узле B и т. д. В результате сумма чисел в узлах нижней клетки на 4 больше, чем в узлах верхней. Аналогичное явление наблюдается при выполнении диагонального шага.

Поскольку в первой клетке маршрута, указанного на рис. 17, стоит число, делящееся на 4 (это число 32, см. рисунок к условию задачи), все числа в клетках маршрута делятся на 4. Пройдем далеко по спирали, чтобы очередной прямолинейный коридор спирали содержал больше 21 клетки. Тогда в неуголовых клетках стоят последовательные кратные 4 и этих чисел не меньше 19, значит, среди них заведомо найдется число, делящееся на 76. Таким образом, в каждом длинном прямолинейном коридоре спирали найдется число, кратное 76.