Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2022/2023 учебный год

8–9 класс. Первый вариант

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет ровно один корень, квадратный трехчлен $2f(2x-3) - f(3x+1)$ также имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

Ответ: -11.

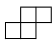
Решение. Поскольку от деления всех коэффициентов трехчлена $f(x)$ на a не меняются ни его корни, ни корни трехчлена $g(x) = 2f(2x-3) - f(3x+1)$, можно считать, что $a = 1$. Квадратный трехчлен имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Поэтому $b^2 = 4c$ и, значит, $f(x) = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$. Тогда

$$g(x) = 2f(2x-3) - f(3x+1) = 2(2x-3)^2 + 2b(2x-3) + \frac{b^2}{2} - \Big((3x+1)^2 + b(3x+1) + \frac{b^2}{4}\Big) =$$
$$= -x^2 + (b-30)x + \Big(17 - 7b + \frac{b^2}{4}\Big).$$

Следовательно,

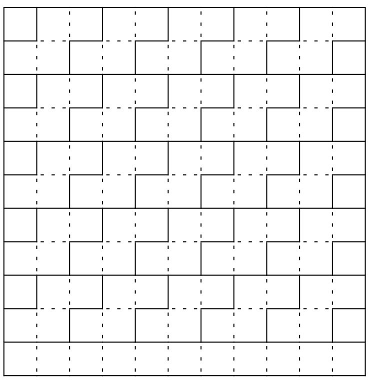
$$0 = (b-30)^2 + 4\Big(17 - 7b + \frac{b^2}{4}\Big) = 2b^2 - 88b + 968 = 2(b-22)^2.$$

Таким образом, дискриминант трехчлена $g(x)$ равен 0 только при $b = 22$, значит, $f(x) = x^2 + 22x + 121$ и его единственный корень равен -11.

2. В клетках квадрата 11×11 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел нечетна. (Фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наименьшее количество единиц может быть в такой расстановке?

Ответ: 25

Решение. Разместим в квадрате 25 фигурок, не имеющих общих клеток (см. левый рисунок). В каждой из них располагается хотя бы одна единица, поэтому всего единиц не меньше 25. Подходящая расстановка 25 единиц: во всех клетках с четными координатами (см. правый рисунок).



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3. Натуральные числа a и b таковы, что числа ab и $(a+1)(b+1)$ — являются квадратами некоторых натуральных чисел. Докажите, что для некоторого натурального числа $n > 1$ число $(a+n)(b+n)$ также является квадратом некоторого натурального числа.

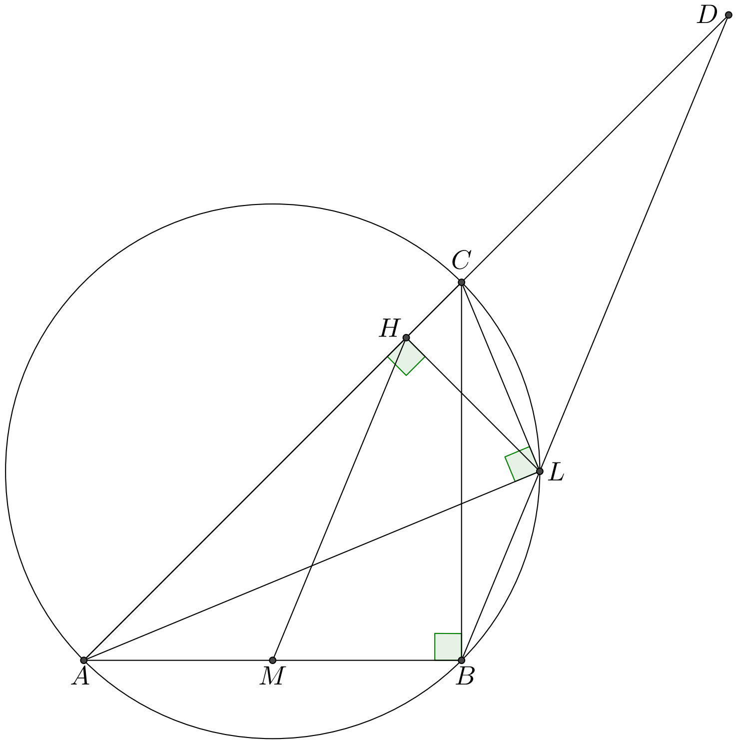
Решение. Возьмем $n = ab$, тогда

$$(a+n)(b+n) = (a+ab)(b+ab) = ab \cdot (a+1)(b+1),$$

что есть произведение двух точных квадратов.

4. Точка M — середина катета AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом $\angle B$. Биссектриса угла $\angle A$ пересекает описанную окружность треугольника в точке L. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из L на прямую AC. Найдите угол $\angle AMH$.

Ответ: $112{,}5^\circ$



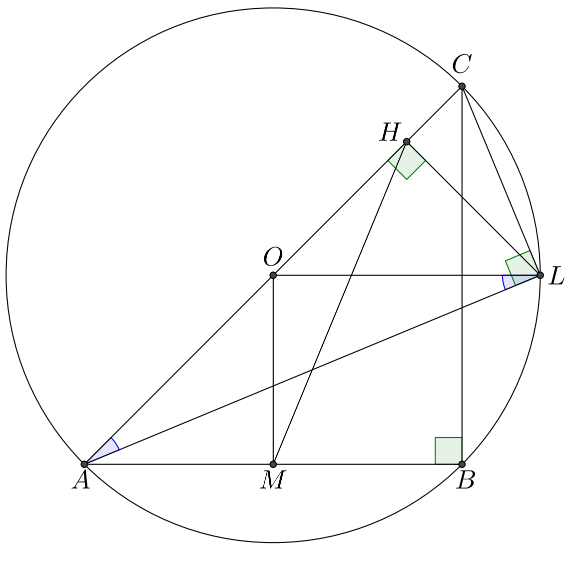
Первое решение. Пусть D — точка пересечения прямых AC и BL. Поскольку четырехугольник $ABLC$ вписанный, $\angle ALB = \angle ACB = 45^\circ$ и $\angle ALC = \angle ABC = 90^\circ$. Кроме того $\angle DAL = \frac{1}{2}\angle BAC = 22{,}5^\circ$. Тогда

$$\angle ADL = \angle ALB - \angle DAL = 45^\circ - 22{,}5^\circ = 22{,}5^\circ.$$

Следовательно, треугольник ALD равнобедренный и его высота LH является медианой. Таким образом, $AH = HD$ и отрезок HM — средняя линия в треугольнике ABD, в частности, прямые HM и BD параллельны и, значит, $\angle AMH = \angle ABL$.

Поскольку AL — биссектриса угла $\angle BAC$, а четырехугольник $ABLC$ вписанный, $\angle CBL = \angle CAL = 22,5^\circ$. Следовательно,

$$\angle AMH = \angle ABL = \angle ABC + \angle CBL = 90^\circ + 22{,}5^\circ = 112{,}5^\circ.$$



Второе решение. Пусть O — середина гипотенузы AC, тогда это центр описанной окружности треугольника ABC и, значит, $CO = LO$. Следовательно, треугольник AOL равнобедренный и $\angle OLA = \angle OAL = \frac{1}{2}\angle BAC = 22{,}5^\circ$. Угол $\angle LOH$ является внешним углом для треугольника AOL, поэтому $\angle LOH = \angle OLA + \angle OAL = 22{,}5^\circ + 22{,}5^\circ = 45^\circ$. Таким образом, треугольник LHO равнобедренный и прямоугольный. Отрезок MO является средней линией треугольника ABC и, значит, он параллелен стороне BC. Стало быть, треугольник AMO равнобедренный и прямоугольный. Следовательно, треугольники AMO и LHO равны по двум углам и стороне ($AO = LO$), а тогда $MO = OH$ и треугольник MOH равнобедренный со внешним углом, равным 45°. Поэтому углы при его основании равны по $22{,}5^\circ$. Осталось заметить, что $\angle AMH = \angle AMO + \angle OMH = 90^\circ + 22{,}5^\circ = 112{,}5^\circ$.

5. Сумма положительных чисел a, b и c равна трем. Докажите неравенство

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. С помощью раскрытия скобок несложно проверить, что $3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2 = 9$. Следовательно,

$$c^2 + 3 \geqslant c^2 + ab + bc + ca = (c + a)(c + b).$$

Поэтому по неравенству о средних для двух чисел

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leqslant \frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{c+b}\Big).$$

Стало быть,

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}+\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ca}{b+a}+\frac{ca}{b+c}\Big) = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}.$$

6. На плоскости проведены $2n + 1$ синяя и $n - 1$ красная прямая, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, найдется не менее $4n + 2$ частей, ограниченных только синими прямыми.

Решение. По индукции несложно проверить, что $2n+1$ синяя прямая делит плоскость на $(2n + 1)(n + 1) + 1 = 2n^2 + 3n + 2$ частей. Каждая красная прямая пересекает не более $2n + 2$ области с синими границами. Поэтому после проведения первой красной прямой останется не менее $(2n^2+3n+2)-(2n+2) = 2n^2+n$ областей с синими границами. Каждая последующая красная прямая портит не более $2n + 1$ синюю область. Действительно, она пересекает не более $2n + 2$ областей с синими границами, но область, в которой лежит точка ее пересечения с первой красной прямой, уже учтена, поэтому она портит не более $2n+1$ новых синих областей. Следовательно, останутся нетронутыми не менее $(2n^2+n) - (2n + 1)(n - 2) = 4n + 2$ областей с синими границами.

8–9 класс. Второй вариант

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет ровно один корень, квадратный трехчлен $f(3x+2) - 2f(2x-1)$ также имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

Ответ: -7.

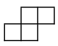
Решение. Поскольку от деления всех коэффициентов трехчлена $f(x)$ на a не меняются ни его корни, ни корни трехчлена $g(x) = f(3x+2) - 2f(2x-1)$, можно считать, что $a = 1$. Квадратный трехчлен имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Поэтому $b^2 = 4c$ и, значит, $f(x) = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$. Тогда

$$g(x) = f(3x+2) - 2f(2x-1) = (3x+3)^2 + b(3x+2) + \frac{b^2}{2} - \Big((2x-1)^2 + b(2x-1) + \frac{b^2}{4}\Big) = \\ = x^2 + (20-b)x + \Big(2 + 4b - \frac{b^2}{4}\Big).$$

Следовательно,

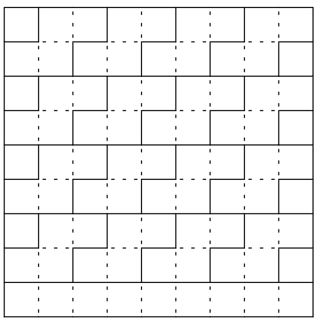
$$0 = (20-b)^2 - 4\Big(2 + 4b - \frac{b^2}{4}\Big) = 2b^2 - 56b + 392 = 2(b-14)^2.$$

Таким образом, дискриминант трехчлена $g(x)$ равен 0 только при $b = 14$, значит, $f(x) = x^2 + 14x + 49$ и его единственный корень равен -7.

2. В клетках квадрата 9×9 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел нечетна. (Фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество единиц может быть в такой расстановке?

Ответ: 65

Решение. Разместим в квадрате 16 фигурок, не имеющих общих клеток (см. левый рисунок). В каждой из них располагается хотя бы один ноль, поэтому всего нулей не меньше 16, а единиц не больше чем $81 - 16 = 65$. Подходящая расстановка 65 единиц: во всех клетках с четными координатами ставим нули, а в остальных клетках единицы (см. правый рисунок).



1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Натуральные числа a и b таковы, что числа ab и $(2a+1)(2b+1)$ — являются квадратами некоторых натуральных чисел. Докажите, что для некоторого четного числа $n > 2$ число $(a+n)(b+n)$ также является квадратом некоторого натурального числа.

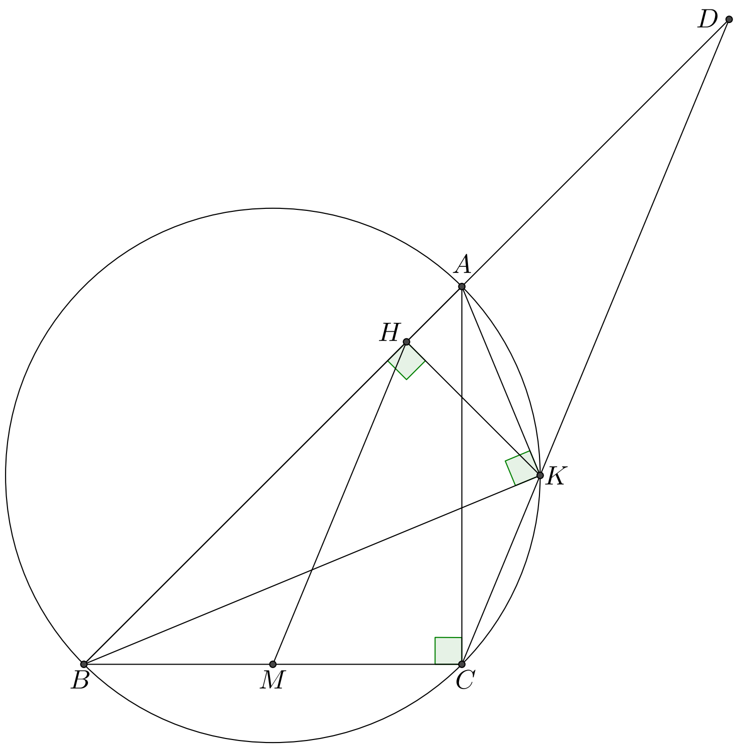
Решение. Возьмем $n = 2ab$, тогда

$$(a+n)(b+n) = (a+2ab)(b+2ab) = ab \cdot (2a+1)(2b+1),$$

что есть произведение двух точных квадратов.

4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Точка M — середина стороны BC. На меньшей дуге AC описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из K на прямую AB. Найдите угол $\angle CAK$, если известно, что $KH = BM$ и прямые MH и CK параллельны.

Ответ: $22,5^\circ$

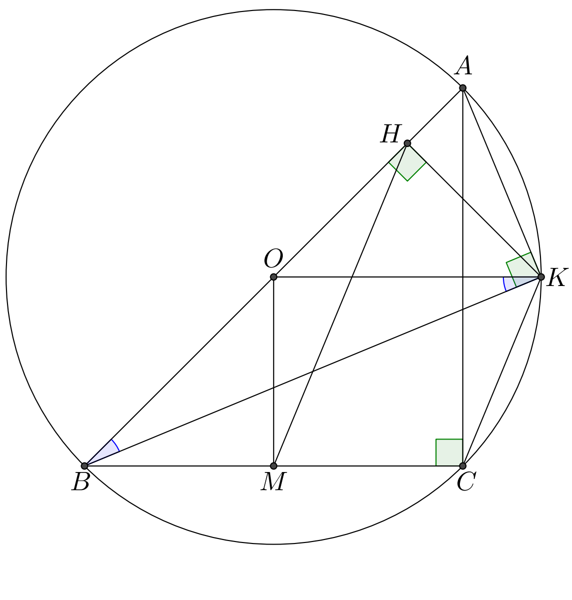


Первое решение. Пусть D — точка пересечения прямых AB и CK. Поскольку четырехугольник $ABCK$ вписанный, $\angle AKD = \angle ABC = 45^\circ$ и $\angle AKB = \angle ACB = 90^\circ$. Прямые HM и CD параллельны, поэтому отрезок HM является средней линией треугольника CBD и, значит, точка H — середина отрезка BD. Тогда в треугольнике KBD медиана совпадает с высотой и сам треугольник является равнобедренным. Следовательно,

$$\angle KBD = \angle BDK = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BKD) = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ - 45^\circ) = 22,5^\circ.$$

Стало быть,

$$\angle CAK = \angle CBK = 45^\circ - \angle KBD = 45^\circ - 22,5^\circ = 22,5^\circ.$$



Второе решение. Пусть O — середина гипотенузы AB, тогда это центр описанной окружности треугольника ABC и, значит, $AO = BO = KO$. Тогда OM — средняя линия треугольника ABC и, в частности, OM параллельно AC и, значит, $\angle OMB = \angle ACB = 90^\circ$. Следовательно, треугольники OMB и OHK равны по двум сторонам и углу между ними ($BO = KO$, $\angle OMB = 90^\circ = \angle OHK$ и $BM = KH$), а тогда $\angle KOA = \angle OBM = 45^\circ$. Таким образом, треугольник AOK равнобедренный с углом при вершине, равным 45°, поэтому $\angle KAO = 90^\circ - \frac{45^\circ}{2} = 67{,}5^\circ$. Осталось заметить, что

$$\angle CAK = \angle KAO - \angle CAO = 67{,}5^\circ - 45{,}5^\circ = 22{,}5^\circ.$$

5. Положительных числа a, b и c удовлетворяют условию $ab + bc + ca = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Первое решение. По неравенству о средних для двух чисел

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+c}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\Big).$$

Следовательно,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}\Big) = \frac{3}{2}.$$

Второе решение. Преобразуем онду дробь:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} = \frac{a\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+b}\sqrt{b+c}\sqrt{c+a}}.$$

Таким образом, надо доказать неравенство

$$\frac{3}{2} \geqslant \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} = \frac{a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\sqrt{b+c}\sqrt{c+a}}.$$

Положим $x = \sqrt{b+c}$, $y = \sqrt{c+a}$ и $z = \sqrt{a+b}$. Тогда $a = \frac{1}{2}(y^2+z^2-x^2)$, $b = \frac{1}{2}(z^2+x^2-y^2)$ и $c = \frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)$. В новых обозначениях доказываемое неравенство примет вид

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \geqslant \frac{1}{xyz}\Big(\frac{1}{2}(y^2+z^2-x^2)\cdot x + \frac{1}{2}(z^2+x^2-y^2)\cdot y + \frac{1}{2}(x^2+y^2-z^2)\cdot z\Big) &= \\ = \frac{x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y - x^3 - y^3 - z^3}{2xyz}&\end{aligned}$$

или, что тоже самое,

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - x^2z - y^2x - y^2z - z^2x - z^2y + 3xyz &= \\ = x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Но это неравенство Шура.

6. На плоскости проведены $2n$ красных и n синих прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, найдется не менее n частей, ограниченных только красными прямыми.

Решение. По индукции несложно проверить, что $2n$ красных прямых делят плоскость на $2n^2+n+1$ частей. Каждая синяя прямая пересекает не более $2n+1$ область с красными границами. Поэтому после проведения первой синей прямой останется не менее $(2n^2+n+1)-(2n+1) = 2n^2-n$ областей с красными границами. Каждая последующая синяя прямая портит не более $2n$ красных областей. Действительно, она пересекает не более $2n+1$ область с красными границами, но область, в которой лежит точка ее пересечения с первой синей прямой, уже учтена, поэтому она портит не более $2n$ новых красных областей. Следовательно, останутся нетронутыми не менее $(2n^2-n)-2n(n-1) = n$ областей с красными границами.

8–9 класс. Третий вариант

1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$. Известно, что $|f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in [0, 1]$. Какое наибольшее значение может принимать a?

Ответ: 8

Решение. Несложно проверить, что $a = 8$ подходит. Действительно, $|2x - 1| \leqslant 1$ при $x \in [0, 1]$, поэтому $f(x) = 8x^2 - 8x + 1 = 2(2x - 1)^2 - 1 \leqslant 1$, а неравенство $f(x) \geqslant -1$ справедливо вообще при всех x.

Предположим, что $a > 8$. Тогда

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} - \frac{a}{2} + 1 = 1 - \frac{a}{4} = \frac{4-a}{4} < -1,$$

что невозможно по условию.

2. В каждой клетке квадрата 15×15 стоит натуральное число, не превосходящее 4, причем сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 7. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 417

Решение. Заметим, что сумма чисел в двух соседних клетках не больше пяти, поскольку в противном случае сумма чисел в содержащем эти две клетки квадрате 2×2 будет не меньше восьми, что невозможно по условию.

Разобьем таблицу на 49 квадратов 2×2 и уголок ширины 1. Уголок разобьем на угловую клетку и 14 доминошек 1×2. Сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 7, сумма чисел в каждой доминошке не превосходит 5, число в угловой клетке не больше 4, поэтому сумма всех чисел в таблице не превосходит $49 \cdot 7 + 14 \cdot 5 + 4 = 417$.

Пример. Пронумеруем горизонтали и вертикали таблицы числами от 1 до 15 слева направо и снизу вверх. В клетки, находящиеся на пересечениях нечетных горизонталей и вертикалей, поместим четверки, в остальные клетки поместим единицы (см. рисунок). Сумма всех чисел равна $64 \cdot 4 + (225 - 64) \cdot 1 = 417$.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Даны натуральные числа a и b. Оказалось, что для любого натурального числа n числа $a + n$ и $b + n$ не являются взаимно простыми. Докажите, что $a = b$.

Первое решение. Возьмем какое-нибудь простое число $p > a$ и положим $n = p - a$. Тогда $a + n = p$ — простое число и по условию $b + n$ должно делиться на p, в частности, $b + n \geqslant p = a + n$. Таким образом, $b \geqslant a$. Аналогично получаем, что $a \geqslant b$ и, значит, $a = b$.

Второе решение. Предположим, что $a < b$ и положим $n = (b-a-1)a+1 \geqslant 1$. Тогда у чисел $a+n$ и $b+n$ есть общий делитель $d > 1$. Следовательно, $b-a = (b+n)-(a+n)$ также делится на d. Но $a+n = (b-a)a+1$, поэтому на d делится и $1 = \big((b-a)a+1\big) - (b-a)a$, что невозможно.

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\Big(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\Big)^2 \geqslant \frac{3}{2}\Big(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\Big).$$

Решение. Пусть $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ и $z = \frac{c}{a}$, тогда надо доказать, что

$$(x+y+z)^2 \geqslant \frac{3}{2}\Big(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big).$$

Заметим, что

$$x^2+y^2+z^2+2\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) = (x+y+z)^2,$$

поэтому доказываемое неравенство можно записать в виде

$$x^2+y^2+z^2+2\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \geqslant \frac{3}{2}\Big(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big).$$

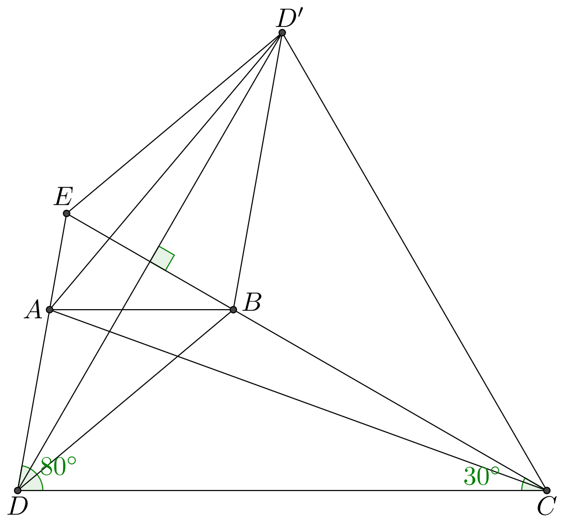
Домножим на 2 и приведем подобные слагаемые, останется неравенство

$$2(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 3(x+y+z).$$

Последнее есть сумма трех неравенств вида $2x^2+\frac{1}{x} \geqslant 3x$, что проверяется, например, группировкой $2x^3-3x^2+1 = (x-1)^2(2x+1) \geqslant 0$.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD, углами $\angle C = 30°$ и $\angle D = 80°$. Найдите $\angle ACB$, если известно, что DB — биссектриса угла $\angle D$.

Ответ: $10°$



Пусть E — точка пересечения прямых AD и BC, а D' — точка, симметричная точке D относительно прямой BC. Тогда $CD = CD'$ и $\angle DCD' = 2\angle BCD = 60°$. Следовательно, треугольник DCD' равносторонний и $DD' = CD$. В силу симметрии $DE = D'E$ и треугольник DED' равнобедренный. Поэтому $\angle ED'D = \angle EDD' = \angle ADC - \angle CDD' = 80° - 60° = 20°$.

По теореме Фалеса $\frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC}$, а по свойству биссектрисы $\frac{EB}{BC} = \frac{ED}{DC} = \frac{ED'}{DD'}$. Следовательно, $\frac{EA}{AD} = \frac{ED'}{DD'}$ и $D'A$ — биссектриса угла $\angle ED'D$ и, значит, $\angle AD'D = \angle AD'E = 10°$. Стало быть, $\angle AD'C = \angle AD'D + \angle DD'C = 10° + 60° = 70° = \angle AEC$. Таким образом, четырехугольник $AED'C$ вписанный и $\angle ACB = \angle ACE = \angle AD'E = 10°$.

6. На плоскости проведены $n > 2$ прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Они разбивают плоскость на части. Докажите, что количество частей, ограниченных ровно тремя прямыми, по крайней мере на 4 больше количества частей, ограниченных более чем четырьмя прямыми.

Решение. Обозначим через a_k количество частей, ограниченных k прямыми. Отметим, что $a_2 \leqslant n$. Действительно, ограничение ровно двумя прямыми означает, что граница части представляет собой два луча, каждый луч может быть границей не более двух таких областей, поэтому общее количество таких областей не больше, чем половина от общго количества лучей.

По индукции несложно показать, что общее количество частей равно $\frac{1}{2}(n^2+n)+1$. Поэтому

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}(n^2+n)+1.$$

Заметим далее, что каждая прямая разделяется точками пересечения с остальными прямыми на n кусков, каждый из них является стороной для двух частей плоскости. Просуммировав количества сторон у всех частей, получим

$$2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots + na_n = 2n^2.$$

Умножим первое равенство на 4 и вычтем из него второе равенство, получим

$$2a_2 + a_3 - a_5 - 2a_6 - \ldots - (n-4)a_n = 2n+4.$$

Следовательно,

$$a_3 = 4 + 2(n-a_2) + a_5 + 2a_6 + \ldots + (n-4)a_n \geqslant 4 + a_5 + a_6 + \ldots + a_n.$$