Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2022/2023 учебный год.

10–11 класс. Первый вариант

1. В каждой клетке таблицы 100×100 записано натуральное число. В каждой строке имеется по крайней мере 10 различных чисел, а в каждых четырех последовательных строках не более 15 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?

2. Найдите все простые p, для которых числа $p+1$ и p^2+1 являются удвоенными квадратами натуральных чисел.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{a(b+2c)}+\sqrt[4]{b(c+2d)}+\sqrt[4]{c(d+2a)}+\sqrt[4]{d(a+2b)}.$$

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, а H — точка пересечения его высот. Оказалось, что прямая OH параллельна стороне BC. На плоскости отметили такую точку K, что $ABHK$ — параллелограмм. Отрезки OK и AC пересеклись в точке L. В каком отношении перпендикуляр, опущенный из точки L на отрезок AH, делит AH?

5. В классе n мальчиков и n девочек ($n \geqslant 3$). Они расселись за круглым столом так, что никакие два мальчика и никакие две девочки не сидят рядом. У учителя есть $2n$ карточек, на них написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2n$, каждое по одному разу. Он так раздал каждому школьнику по одной карточке, что число у любой девочки больше числа у любого мальчика. Затем каждая девочка написала на листочке сумму чисел на трех карточках: ее собственной и сидящих рядом с ней мальчиков. При каких n все полученные n чисел могли оказаться равными?

10–11 класс. Второй вариант

1. В каждой клетке таблицы 75×75 записано натуральное число. В каждой строке имеется по крайней мере 15 различных чисел, а в каждых трех последовательных строках не более 25 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?

2. Найдите все простые p, для которых числа $p + 7$ и $p^2 + 7$ являются удвоенными квадратами натуральных чисел.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

4. В остроугольном треугольнике ABC опущены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. На плоскости выбрана такая точка T, что прямые TA и TB являются касательными к описанной окружности треугольника ABC, точка O — центр этой окружности. Перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую A_1B_1, пересекает прямую CC_1 в точке K, а проходящая через точку C_1 параллельная OK прямая пересекает отрезок CO в точке L. Найдите угол $\angle CLA_1$.

5. В классе n мальчиков и n девочек ($n \geqslant 3$). Они расселись за круглым столом так, что никакие два мальчика и никакие две девочки не сидят рядом. У учителя есть $2n$ карточек, на них написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2n$, каждое по одному разу. Он так раздал каждому школьнику по одной карточке, что число у любой девочки больше числа у любого мальчика. Затем каждый мальчик написал на листочке сумму чисел на трех карточках: его собственной и сидящих рядом с ним девочек. При каких n все полученные n чисел могли оказаться равными?

10–11 класс. Третий вариант

1. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 15×15 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×10 была хотя бы одна отмеченная клетка.

2. Найдите все такие тройки простых чисел p, q и r, что $\dfrac{p}{q} = \dfrac{4}{r+1} + 1$.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{a^2(a+b)} + \sqrt[4]{b^2(b+c)} + \sqrt[4]{c^2(c+d)} + \sqrt[4]{d^2(d+a)}.$$

4. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на сторонах AC и BC выбраны соответственно такие точки L и M, что $AK = AL$ и $BK = BM$. Оказалось, что прямые LM и AB параллельны. Касательная в точке L к описанной окружности треугольника KLM пересекает отрезок CK в точке D, а проходящая через D прямая, параллельная стороне AB, пересекает сторону BC в точке E. Найдите угол $\angle DEO$, где O — центр описанной окружности треугольника KLM.

5. За круглым столом сидит $n-1$ школьник ($n \geqslant 4$). У учителя есть n карточек, на них написаны числа $1, 2, 3, \ldots, n$, каждое по одному разу. Он раздал каждому школьнику по одной карточке и одну карточку оставил себе. Для каждой пары сидящих рядом школьников посчитали сумму чисел на их карточках и записали на доске, потом на доску дописали сумму чисел на карточке у учителя и одного из школьников. При каких n выписанные на доску n чисел могли давать различные остатки от деления на n?

10–11 класс. Четвертый вариант

1. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 20×20 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×12 была хотя бы одна отмеченная клетка.

2. Найдите все такие тройки простых чисел p, q и r, что $\dfrac{p}{q} = \dfrac{8}{r-1} + 1$.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не превосходит 4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt[4]{2a^2 + a^2b} + \sqrt[4]{2b^2 + b^2c} + \sqrt[4]{2c^2 + c^2d} + \sqrt[4]{2d^2 + d^2a}.$$

4. На катете AC прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB отмечена точка P. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую BP, а точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону AB. На плоскости выбрана такая точка T, что прямые TA и TP являются касательными к описанной окружности треугольника PAB, точка O — центр этой окружности. Перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую DE, пересекает прямую BC в точке Q, а проходящая через точку C параллельная OQ прямая пересекает отрезок BO в точке K. Найдите угол $\angle OKE$.

5. В математическом кружке занимается m мальчиков и n девочек. У преподавателя есть mn карточек, на них написаны числа $1, 2, 3, \ldots, mn$, каждое по одному разу. Он раздает кружковцам по одной карточке (пока не закончатся карточки или кружковцы). В итоге у каждого кружковца на руках будет одна карточка или ни одной, если кому-то не хватило карточки. Для каждой пары мальчик–девочка посчитали сумму чисел на их карточках и выписали ее доску. При каких m и n числа на доске могут давать различные остатки от деления на mn?

10–11 класс. Пятый вариант

1. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано целое число. Оказалось, что для всех k от 1 до n сумма чисел, стоящих в k-ом столбце, либо на один меньше, либо на два больше суммы чисел, стоящих в k-й строке. При каких n такое возможно?

2. Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, для которых числа a^2+1 и b^2+1 — простые и $(a^2+1)(b^2+1) = c^2+1$.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d не меньше 8. Найдите наименьшее значение выражения

4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причем треугольник APD — остроугольный. Точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Из точки E провели перпендикуляр к прямой AC, а из точки F провели перпендикуляр к прямой BD, эти перпендикуляры пересеклись в точке Q. Найдите угол между прямыми PQ и BC.

5. В классе $n \geqslant 3$ школьников. У учителя есть $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ карточек, на них написаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, m, каждое по одному разу. Он раздал каждому школьнику по одной карточке. Для каждой пары школьников посчитали сумму чисел на их карточках и все полученные числа записали на доске. Оказалось, что числа на доске дают различные остатки от деления на m. Докажите, что если m четно, то n является квадратом натурального числа.

10–11 класс. Шестой вариант

1. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано натуральное число. Оказалось, что для всех k от 1 до n сумма чисел, стоящих в k-ом столбце, на единицу отличается от суммы чисел, стоящих в k-й строке. При каких n такое возможно?

2. Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, для которых числа $a^2 - 23$ и $b^2 - 23$ — простые и $(a^2 - 23)(b^2 - 23) = c^2 - 23$.

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{a^8}{(a^2+b)(a^2+c)(a^2+d)} + \frac{b^8}{(b^2+c)(b^2+d)(b^2+a)} + \frac{c^8}{(c^2+d)(c^2+a)(c^2+b)} + \frac{d^8}{(d^2+a)(d^2+b)(d^2+c)}.$$

4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причем угол APB — тупой. Точки E и F — середины сторон AD и BC соответственно. Из точки E провели перпендикуляр к прямой AC, а из точки F провели перпендикуляр к прямой BD, эти перпендикуляры пересеклись в точке Q. Найдите угол между прямыми PQ и CD.

5. В классе $n \geqslant 3$ школьников. У учителя есть $m = \frac{1}{2}n(n-1)$ карточек, на них написаны числа $1, 2, 3, \ldots, m$, каждое по одному разу. Он раздал каждому школьнику по одной карточке. Для каждой пары школьников посчитали сумму чисел на их карточках и все полученные числа записали на доске. Оказалось, что числа на доске дают различные остатки от деления на m. Докажите, что если m нечетно, то $n - 2$ является квадратом натурального числа.