Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2022/2023 учебный год

6–7 класс. Первый вариант

1. Натуральные числа x и y не делятся на 59, а число $3x + 28y$ — делится. Докажите, что $5x + 16y$ не делится на 59.

2. В мешке лежит 21 обычный кубик, на гранях каждого написаны числа от 1 до 6. Все кубики пронумерованы. Зритель берет из мешка 3 кубика, показывает их фокуснику и один кубик кладет в карман. Фокусник кладет два оставшихся кубика на стол. Зритель записывает числа на верхних гранях кубиков (в каком именно порядке — он выбирает сам) и сообщает их второму фокуснику. А тот называет номер кубика в кармане у зрителя. Как заранее договориться фокусникам, чтобы фокус удался?

3. Можно ли в вершинах куба расставить 8 различных чисел из диапазона от 1 до 220 так, чтобы числа в соседних вершинах имели общий делитель больше 1, а в несоседних не имели бы?

4. На схеме лабиринта на рис. 1 каждый отрезок (звено) — это коридор, а кружочек — небольшая комната. В некоторых комнатах стоят маяки, они жужжат — каждый своим голосом. Находясь в любой комнате, робот слышит сигнал каждого маяка и по затуханию определяет расстояние до него, т. е. количество звеньев на кратчайшем пути к маяку. Например, если маяк находится в комнате A (в шахматных обозначениях это комната в4), а робот в комнате B (это комната г4), расстояние между ними — 7 звеньев. Схема лабиринта у робота есть и маяки на ней указаны. Для какого наименьшего числа маяков робот, оказавшись в любой комнате, сможет на слух однозначно определить, где он находится?

а) Укажите, как можно расставить такое количество маяков. Почему робот сумеет по ним определить свою комнату?

б) Докажите, что нельзя обойтись меньшим числом маяков.

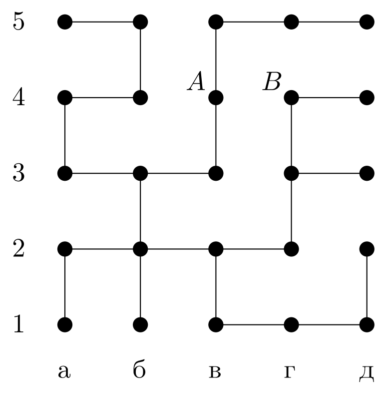

Рис. 1: Лабиринт

5. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют числа 1, 2, 3... Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах (см. рис. 4). Верно ли, что в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на 52?

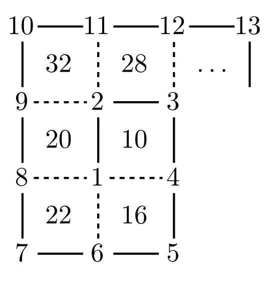

Рис. 4: Числа по спирали

6–7 класс. Второй вариант

1. Натуральные числа x и y не делятся на 61, а число $7x + 34y$ — делится. Докажите, что $5x + 16y$ не делится на 61.

2. В коробке лежит 23 обычных кубика, на гранях каждого написаны числа от 1 до 6. Зритель берет из коробки несколько кубиков (можно даже все, но обязательно не меньше трех кубиков), показывает их фокуснику, два кубика отдает фокуснику, а остальные кубики кладет в карман. Фокусник кладет два оставшихся кубика на стол. Зритель записывает числа на верхних гранях кубиков (в каком именно порядке — он выбирает сам) и сообщает их второму фокуснику. А тот называет, сколько кубиков лежит в кармане у зрителя. Как заранее договориться фокусникам, чтобы фокус удался?

3. Можно ли в вершинах куба расставить 8 различных нечетных чисел из диапазона от 1 до 600 так, чтобы числа в соседних вершинах имели общий делитель больше 1, а в несоседних не имели бы?

4. На схеме лабиринта на рис. 7 каждый отрезок (звено) — это коридор, а кружочек — небольшая комната. В некоторых комнатах стоят маяки, они жужжат — каждый своим голосом. Находясь в любой комнате, робот слышит сигнал каждого маяка и по затуханию определяет расстояние до него, т. е. количество звеньев на кратчайшем пути к маяку. Например, если маяк находится в комнате A (в шахматных обозначениях это комната в4), а робот в комнате B (это комната г4), расстояние между ними — 5 звеньев. Схема лабиринта у робота есть и маяки на ней указаны. Для какого наименьшего числа маяков робот, оказавшись в любой комнате, сможет на слух однозначно определить, где он находится?

а) Укажите, как можно расставить такое количество маяков. Почему робот сумеет по ним определить свою комнату?

б) Докажите, что нельзя обойтись меньшим числом маяков.

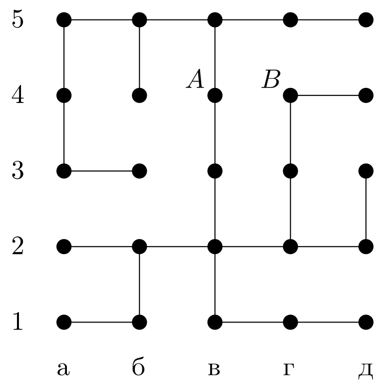

Рис. 7: Лабиринт

5. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют числа 0, 1, 2, 3... Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах (см. рис. 10). Верно ли, что в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на 68? Верно ли, что в центрах клеток числа не повторяются?

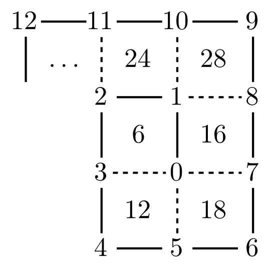

Рис. 10: Числа по спирали

6–7 класс. Третий вариант

1. Натуральные числа x и y не делятся на 67, а число $7x + 32y$ — делится. Докажите, что $10x + 17y + 1$ не делится на 67.

2. В сейфе хранится 20 кошельков, в каждом лежат монеты в 1, 2, 5 и 10 рублей. Кошельки пронумерованы. Зритель берет из сейфа 4 кошелька, показывает их фокуснику и один кошелек кладет в карман. Фокусник берет из каждого из трех оставшихся кошельков по одной монете, дает их зрителю и тот кладет их на стол (как считает нужным). Приглашают второго фокусника, он смотрит на монетки на столе и называет номер кошелька в кармане у зрителя. Как заранее договориться фокусникам, чтобы фокус удался? Как показать такой фокус?

3. Можно ли в вершинах куба расставить 8 различных чисел, не делящихся на 13, из диапазона от 1 до 245 так, чтобы числа в соседних вершинах имели общий делитель больше 1, а в несоседних не имели бы?

4. На схеме лабиринта на рис. 13 каждый отрезок (звено) — это коридор, а кружочек — небольшая комната. В некоторых комнатах стоят маяки, они жужжат — каждый своим голосом. Находясь в любой комнате, робот слышит сигнал каждого маяка и по затуханию определяет расстояние до него, т. е. количество звеньев на кратчайшем пути к маяку. Например, если маяк находится в комнате A (в шахматных обозначениях это комната в4), а робот в комнате B (это комната г4), расстояние между ними — 5 звеньев. Схема лабиринта у робота есть и маяки на ней указаны. Для какого наименьшего числа маяков робот, оказавшись в любой комнате, сможет на слух однозначно определить, где он находится?

а) Укажите, как можно расставить такое количество маяков. Почему робот сумеет по ним определить свою комнату?

б) Докажите, что нельзя обойтись меньшим числом маяков.

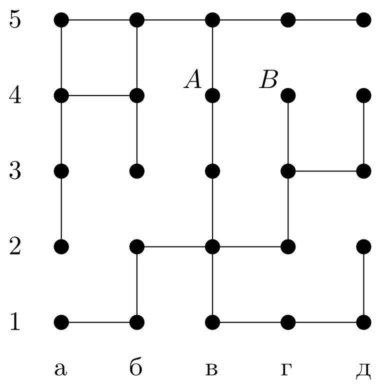

Рис. 13: Лабиринт

5. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют последовательные натуральные числа 2, 3, 4, 5... Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в ее узлах (см. рис. 16). Верно ли, что в центрах клеток бесконечно много раз встретятся числа, делящиеся на 76?

Верно ли, что в центрах клеток числа не повторяются?

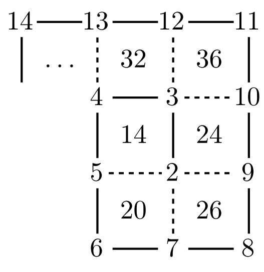

Рис. 16: Числа по спирали