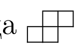
Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2022/2023 учебный год

8–9 класс. Первый вариант

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет ровно один корень, квадратный трехчлен $2f(2x-3) - f(3x+1)$ также имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

2. В клетках квадрата 11×11 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел нечетна. (Фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наименьшее количество единиц может быть в такой расстановке?

3. Натуральные числа a и b таковы, что числа ab и $(a+1)(b+1)$ — являются квадратами некоторых натуральных чисел. Докажите, что для некоторого натурального числа $n > 1$ число $(a+n)(b+n)$ также является квадратом некоторого натурального числа.

4. Точка M — середина катета AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом $\angle B$. Биссектриса угла $\angle A$ пересекает описанную окружность треугольника в точке L. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из L на прямую AC. Найдите угол $\angle AMH$.

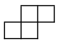
5. Сумма положительных чисел a, b и c равна трем. Докажите неравенство

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

6. На плоскости проведены $2n+1$ синяя и $n-1$ красная прямая, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, найдется не менее $4n+2$ частей, ограниченных только синими прямыми.

8–9 класс. Второй вариант

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет ровно один корень, квадратный трехчлен $f(3x+2) - 2f(2x-1)$ также имеет ровно один корень. Найдите корень трехчлена $f(x)$.

2. В клетках квадрата 9×9 расставлены нули и единицы таким образом, что в любой фигурке из четырех клеток вида  сумма чисел нечетна. (Фигурку можно поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество единиц может быть в такой расстановке?

3. Натуральные числа a и b таковы, что числа ab и $(2a+1)(2b+1)$ — являются квадратами некоторых натуральных чисел. Докажите, что для некоторого четного числа $n > 2$ число $(a+n)(b+n)$ также является квадратом некоторого натурального числа.

4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Точка M — середина стороны BC. На меньшей дуге AC описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из K на прямую AB. Найдите угол $\angle CAK$, если известно, что $KH = BM$ и прямые MH и CK параллельны.

5. Положительных числа a, b и c удовлетворяют условию $ab + bc + ca = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

6. На плоскости проведены $2n$ красных и n синих прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, найдется не менее n частей, ограниченных только красными прямыми.

8–9 класс. Третий вариант

1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$. Известно, что $|f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in [0, 1]$. Какое наибольшее значение может принимать a?

2. В каждой клетке квадрата 15×15 стоит натуральное число, не превосходящее 4, причем сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 7. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

3. Даны натуральные числа a и b. Оказалось, что для любого натурального числа n числа $a + n$ и $b + n$ не являются взаимно простыми. Докажите, что $a = b$.

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right).$$

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD, углами $\angle C = 30^\circ$ и $\angle D = 80^\circ$. Найдите $\angle ACB$, если известно, что DB — биссектриса угла $\angle D$.

6. На плоскости проведены $n > 2$ прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Они разбивают плоскость на части. Докажите, что количество частей, ограниченных ровно тремя прямыми, по крайней мере на 4 больше количества частей, ограниченных более чем четырьмя прямыми.