Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2022/2023 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Шахматные клубы Москвы, Санкт-Петербурга и Казани договорились провести турнир. Каждый москвич сыграл ровно с 9 петербружцами и с n казанцами. Каждый петербуржец сыграл ровно с 6 москвичами и с 2 казанцами. Каждый казанец сыграл ровно с 8 москвичами и с 6 петербуржцами. Чему равно n?*

Ответ: 4.

Решение. Пусть команда Москвы состояла из m участников, команда Санкт-Петербурга — из p участников, команда Казани — из k участников.

По условию, каждый москвич, т. е. каждый из m человек, сыграл ровно 9 партий с петербуржцами; а каждый петербуржец — каждый из p человек — сыграл ровно с 6 москвичами. Очевидно, партии, сыгранные москвичами с петербуржцами, — это те же партии, что сыграли петербуржцы с москвичами, т.е. $m \cdot 9 = p \cdot 6$.

Аналогично, $m \cdot n = k \cdot 8$ и $p \cdot 2 = k \cdot 6$. Имеем

$$\left\{\begin{array}{l} 9m = 6p, \\ nm = 8k, \\ 2p = 6k; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3m = 2p, \\ nm = 8k, \\ p = 3k; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3m = 2 \cdot 3k, \\ nm = 8k, \\ p = 3k; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 2k, \\ nm = 8k, \\ p = 3k; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 2k, \\ n \cdot 2k = 8k, \\ p = 3k. \end{array}\right.$$

Отсюда, $n = 4$.

2. (10 баллов) *В каждой клетке квадрата* 50×50 *записали число, равное количеству прямоугольников* 1×16 *(как вертикальных, так и горизонтальных), в которых эта клетка является крайней. В скольких клетках записаны числа, большие или равные 3?*

Ответ: 1600.

Решение. Будем обозначать клетки квадрата парами (i, j), где $i = 1, \ldots, 50$, $j = 1, \ldots, 50$. Нумерацию начнем с нижнего левого угла квадрата.

Клетка (i, j) является правой крайней для горизонтального прямоугольника, если $16 \leqslant i$ — неравенство (1), и левой крайней, если $i \leqslant 50 - 15 = 35$ — неравенство (2). Клетка (i, j) является верхней крайней для вертикального прямоугольника, если $16 \leqslant j$ — неравенство (3), и нижней крайней, если $j \leqslant 50 - 15 = 35$ — неравенство (4). При этом нас интересует количество клеток квадрата, для которых выполняются не менее трех неравенств из (1)–(4).

Сначала найдем количество клеток, для которых верны все неравенства. Это клетки, для которых $16 \leqslant i \leqslant 35$ и $16 \leqslant j \leqslant 35$. Их $(35 - 15) \times (54 - 15) = 20 \times 20 = 400$.

Теперь вычислим количество клеток, для которых не верно неравенство (1), но верны (2)–(4). Т.е. $i < 16$ и $16 \leqslant j \leqslant 35$. Таких клеток $15 \times (35 - 15) = 15 \times 20 = 300$. Легко видеть, что из-за симметрии (квадрата) количество клеток, для которых верны другие наборы трех неравенств, будут такими же.

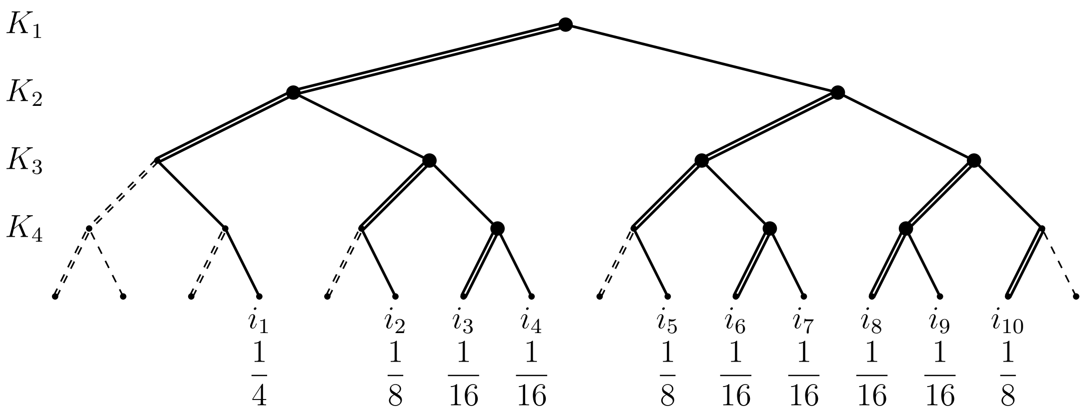
В сумме получаем $400 + 3 \cdot 300 = 1600$.

3. (20 баллов) *На факультете журналистики университета Сказочного Содружества имеется 5 целевых мест: 2 на дневном отделении и 3 на вечернем. На них направлены 4 курицы: три черных и белая. Место для каждой курицы резервируется сразу после подачи ею заявления, причем порядок подачи курицами заявлений строго случаен. При наличии свободных мест на обоих отделениях каждая курица с равной вероятностью выбирает любое из них. Найдите вероятность того, что на дневное отделение поступит хотя бы одна черная курица.*

Ответ: 0,922.

Решение. На факультете имеются суммарно 5 мест, на которые поступают 4 абитуриента. Поскольку все абитуриенты поступят на факультет, то исход определяется выбором тех, кто поступит на дневное отделение. Это могут быть либо два абитуриента (и их можно выбрать шестью способами), либо один абитуриент (его можно выбрать четырьмя способами); таким образом, всего имеется 10 исходов. Найдем вероятности этих исходов.

Зафиксируем порядок, в котором курицы подают заявления. Пусть это $K_1K_2K_3K_4$. Следовательно, сначала выбор места будет осуществлять курица K_1, потом курица K_2 и т.д. Поскольку в условии нет ограничений на предпочтения абитуриентов, то выбор дневного и вечернего отделения равновероятен и равен $\frac{1}{2}$, если это технически возможно (не все варианты доступны для куриц, делающих выбор последними — из-за ограничений на количество мест как на дневном, так и на вечернем отделениях).



На рисунке двойными линиями, ведущими от узла влево, обозначен выбор дневного отделения, одинарными, ведущими от узла вправо, — вечернего. Сплошные линии — это технически осуществимые случаи, штриховые — невозможные варианты. То, какая именно курица делает выбор на конкретном уровне, отмечено в столбце слева. Если для осуществления какого-либо варианта фактический выбор делают n куриц, то вероятность такого варианта составляет $\frac{1}{2^n}$. Заметим, что для осуществления, например, варианта i_1 нужен выбор только первых двух куриц — третьей и четвертой ничего не остается, как выбрать вечернее отделение. Вероятности каждого из возможных вариантов приведены на рисунке внизу под названиями вариантов.

Курицы подают заявления в случайном порядке, поэтому когда в решении идет речь, например, об одной курице из четырех, то, во-первых, это может быть как первая среди подавших заявление, так и вторая, третья или четвертая; а во-вторых, если нас интересует не произвольная из куриц, а какая-то конкретная, необходимо понимать, сколькими способами можно выбрать нужную нам курицу из имеющихся. Ответ будет получаться как произведение соответствующих вероятностей.

Событие «на дневное отделение поступит хотя бы одна черная курица» противоположно событию «на дневное отделение не поступит ни одна из черных куриц». На дневном отделении должна быть хотя бы одна курица (т. к. на вечернем отделении мест 3, а куриц по условию 4), а поскольку у нас только одна белая, то именно она на дневное отделение и поступит. Вероятность выбора ровно одной (белой) курицы четырех имеющихся равна $\frac{1}{4}$.

Теперь найдем вероятность того, что «на дневное отделение поступит ровно одна курица». На рисунке это события i_4, i_7, i_9 и i_{10} — когда дневное отделение выбирает курица K_1, K_2, K_3 и K_4 соответственно. Вероятность их осуществления равна $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$.

Отсюда получаем ответ: $1 - \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{59}{64} \approx 0,922$.

4. (20 баллов) *Для скольких натуральных чисел n, не превосходящих 600, тройки чисел*

$$\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{3}\right], \left[\frac{n}{5}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{n+1}{2}\right], \left[\frac{n+1}{3}\right], \left[\frac{n+1}{5}\right]$$

различны? Как всегда, через $[x]$ обозначена целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящящее x.

Ответ: 440.

Решение.

5. (20 баллов) *На базаре в Египте турист торгуется с продавцом за сувенир стоимостью 10 000 египетских фунтов. Турист сначала снижает цену на x процентов* $(0 < x < 100)$, *потом продавец повышает цену на x процентов и т. д. Число x в ходе торга не меняется, и продавец повышает цену хотя бы один раз. Торг идет до тех пор, пока один из участников не получит нецелое значение цены сувенира. Найдите наибольшее возможное количество изменений цены сувенира в ходе такого торга (включая последнее нецелое значение цены).*

Ответ: 5.

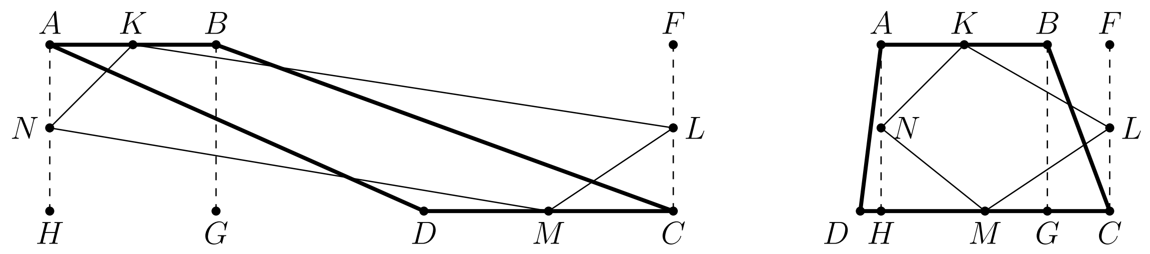
Решение. Конечная стоимость сувенира может быть найдена по одной из двух формул (в зависимости от того, чье было последнее слово): $10000 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$ или $10000 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$.

После несложных преобразований из этих формул получаем $\frac{(100-x)^n(100+x)^n}{100^{2n-2}}$ и $\frac{(100-x)^{n+1}(100+x)^n}{100^{2n-2}}$.

Выражение вида $(100-x)^a(100+x)^b$ делится на 100^t при $a>0, b>0, x>0$ и $t>0$ хотя бы один раз при $x = 10i, i = 1, \ldots, 9$ (четное число, кратное 5).

6. (30 баллов) *Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 15 и 19 соответственно. AH и BG — высоты на прямую DC, CF — высота на прямую AB. Точки K, L, M, N — середины отрезков AB, CF, CD и AH соответственно. Найдите отношение площади трапеции $ABCD$ к площади четырехугольника $KLMN$, если $DG = 17$.*

Ответ: 2 или $\frac{2}{3}$.



Решение. Обозначим трапецию $ABCD$ вершинами по часовой стрелке, а основания будем считать расположенными горизонтально. Поскольку в условии не обозначено, где именно на прямой DC лежит точка G, то в решении необходимо рассмотреть все случаи. Возможны два варианта: точка G лежит слева от точки D (см. рисунок слева) и точка G лежит справа от точки D (см. рисунок справа). Во втором случае, т. к.

$$DG = 17 < 19 = DC,$$

точка G лежит на отрезке DC.

Пусть h — высота трапеции. По условию, точки N и L — середины высот трапеции. Заметим, что площадь четырехугольника $KLMN$ складывается из площадей треугольников KNL и MNL, имеющих одно основание и высоты, равные половине высоты трапеции, т. е.

$$S_{KLMN} = S_{KNL} + S_{MNL} = 2 \cdot S_{KNL} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot NL \cdot \frac{h}{2} = NL \cdot \frac{h}{2}.$$

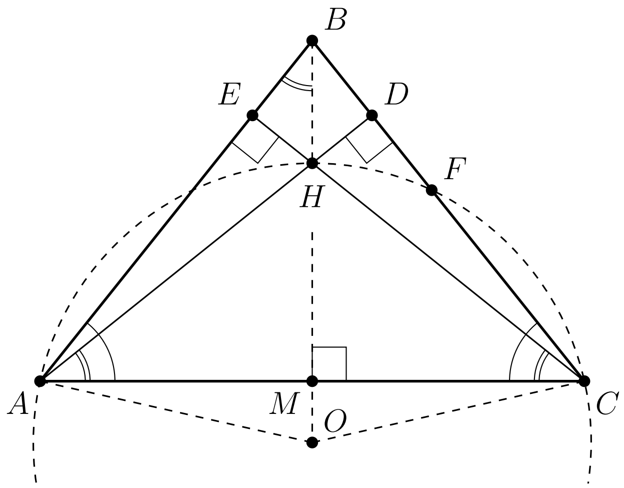
Получаем, что искомое отношение площадей равно

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{\frac{AB+DC}{2} \cdot h}{NL \cdot \frac{h}{2}} = \frac{AB+CD}{NL}.$$

NL — это расстояние между прямыми AH и CF. В случае, когда точка G лежит слева от точки D, т. е. не попадает на основание CD, величина $NL = AB + BG + DC = 15 +$

$+17+19=51$. Во втором случае $NL = HG+GC = AB+(DC-DG) = 15+(19-17) = 17$. Следовательно, получаем два ответа: $\frac{AB+CD}{NL} = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}$ и $\frac{AB+CD}{NL} = \frac{34}{17} = 2$.

7. (30 баллов) *В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены высоты AD и CE, которые пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника ACH пересекает отрезок BC в точке F. Докажите, что $\angle ABH = \angle BFH$.*



Решение. Заметим, что высота из вершины B также будет проходить через H, т. к. высоты треугольника пересекаются в одной точке. Пусть M — основание высоты из вершины B.

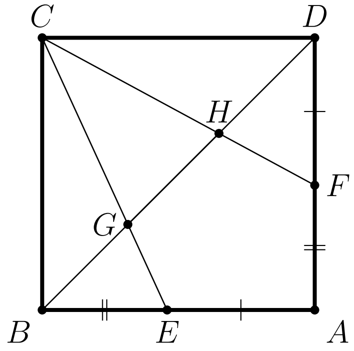
Прямоугольные треугольники ADC и ABM подобны по двум углам, т. к. угол BAM в треугольнике ABM равен углу BCA в треугольнике ADC как углы при основании равнобедренного треугольника ABC.

Угол BFH является смежным с углом HFC, т. е. равен $180° - \angle HFC$. А т. к. $AHFC$ — вписанный четырехугольник, то $\angle HAC = 180° - \angle HFC$. Следовательно, $\angle BFH = \angle HAC$. А, как мы помним, $\angle HAC = \angle ABH$ из подобия треугольников ABC и ABM.

8. (30 баллов) *На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F так, что* $BE : EA = AF : FD = 2022 : 2023$. *Отрезки EC и FC пересекают диагональ квадрата BD в точках G и H соответственно. Найдите $GH : BD$.*

Ответ: $GH : BD = 12271519 : 36814556$.

Первое решение. Решим задачу в общем виде: $BE : EA = AF : FD = 2022 : 2023 = m : n$. Пусть $BE = AF = mx$, $EA = FD = nx$, тогда $BC = CD = (m+n)x$, $BD = (m+n)x\sqrt{2}$, $EC^2 = (m^2 + (m+n)^2)x^2$, $FC^2 = (n^2 + (m+n)^2)x^2$. Заметим, что BD — биссектриса в треугольниках BEC и DFC, используя известные свойства биссектрисы находим, что $EG = \dfrac{m}{2m+n}EC$, $GC = \dfrac{m+n}{2m+n}EC$, $FH = \dfrac{n}{2n+m}FC$, $HC = \dfrac{m+n}{2n+m}FC$.



По формуле длины биссектрисы находим

$$BG^2 = BE \cdot BC - EG \cdot GC = m(m+n)x^2 - \frac{m(m+n)}{(2m+n)^2}(m^2 + (m+n)^2)x^2 =$$

$$= \frac{m(m+n)x^2}{(2m+n)^2}\left((2m+n)^2 - m^2 - (m+n)^2\right) = \frac{2m^2(m+n)^2x^2}{(2m+n)^2},$$

то есть, $BG = \dfrac{\sqrt{2}m(m+n)x}{2m+n}$. Аналогично находим, что $DH = \dfrac{\sqrt{2}n(m+n)x}{2n+m}$. Теперь все готово для того, чтобы посчитать ответ:

$$\frac{GH}{BD} = \frac{BD - BG - DH}{BD} = 1 - \frac{m}{2m+n} - \frac{n}{2n+m} = \frac{m^2+mn+n^2}{(2m+n)(2n+m)}.$$

Поставляем значения $m = 2022, n = 2023$ и находим $GH : BD = 12271519 : 36814556$.

Второе решение. Треугольники EBG и GCD подобны (по двум углам), следовательно, $\dfrac{BG}{GD} = \dfrac{BE}{CD} = \dfrac{2022}{4045}$ и $\dfrac{BG}{BD} = \dfrac{2022}{6067}$. Аналогично, треугольник HFD подобен треугольнику HBC, следовательно, $\dfrac{HD}{BH} = \dfrac{FD}{BC} = \dfrac{2023}{4045}$ и $\dfrac{HD}{BD} = \dfrac{2023}{6068}$. Тогда искомое отношение

$$\frac{GH}{BD} = 1 - \frac{BG}{BD} - \frac{HD}{BD} = \frac{12259387}{36778160}.$$

9. (40 баллов) *Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди натуральных чисел от 1 до 3000 так, чтобы разность любых двух из них была отлична от 1, 4 и 5?*

Ответ: 1000.

Решение. Приведем пример. Можно выбрать все числа, кратные 3. Тогда разность любых двух чисел будет также кратна 3, а числа 1, 4 и 5 не кратны 3.

Оценка строится из того соображения, что среди 6 последовательных чисел не может быть выбрано 3 числа. Докажем это утверждение. Возьмем какое-либо выбранное число и пять чисел, следующих за ним. Тогда точно не выбраны второе, пятое и шестое. Остаются третье и четвертое числа, но они не могут быть выбраны оба сразу. Среди пяти и менее последовательных чисел выбрать 3 числа тем более невозможно.

10. (40 баллов) *На доске написаны 1000 различных натуральных чисел. Оказалось, что для каждого написанного числа a на доске найдется еще хотя бы одно число b такое,* *что $|a-b|$ — простое число. Докажите, что можно подчеркнуть не более 500 чисел так, чтобы для каждого неподчеркнутого числа a нашлось подчеркнутое число b, для которого $|a-b|$ — простое число.*

Первое решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — числа, ребро проводится, если модуль разности этих чисел — простое число. Будем красить каждую компоненту связности этого графа в два цвета: сначала покрасим любую вершину в красный. Затем покрасим всех её соседей в синий. Затем всех соседей синих, которые ещё не покрашены, в красный. Затем соседей красных в синий. И так далее. Легко видеть, что у каждой красной вершины будет хотя бы один синий сосед, а у каждой синей — хотя бы один красный. В каждой компоненте связности выберем цвет, вершин которого не более половины, и подчеркнем вершины этого цвета. Каждая неподчеркнутая вершина будет соединена хотя бы с одной подчеркнутой.

Второе решение. В том же графе выберем наибольшее независимое множество вершин M (т. е. такое множество вершин, что никакие две вершины в нем не соединены ребром). Любая вершина M соединена ребром с вершинй не из M, так как по условию степень каждой вершины не менее 1. Любая вершина не из M соединена ребром хотя бы с одной вершиной из M, иначе можно было бы добавить ее к M и получить независимое множество еще большего размера. Значит, мы можем подчеркнуть или все вершины M, или все вершины не из M. Выбирая то из множеств, размер которого не превосходит половины от общего размера, получаем требуемое.

11. (40 баллов) *Найдите все пары рациональных чисел (a, b), для которых* $\sqrt{a}+\sqrt{b}=$ $=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Ответ: $(0,5; 1,5)$ и $(1,5; 0,5)$.

Решение. Возводя равенство в квадрат, получим $a+b+2\sqrt{ab}=2+\sqrt{3}$. Перенесем $a+b$ в правую часть и снова возведем в квадрат. Получим $4ab=(2-a-b)^2+2(2-a-b)\sqrt{3}+$ $+3$. В этом выражении все слагаемые, кроме $2(2-a-b)\sqrt{3}$, рациональны, а значит и это слагаемое должно быть рационально. Что возможно только при $2-a-b=0$. Тогда имеем $a+b=2$, $2\sqrt{ab}=\sqrt{3}$. Такую систему уже несложно решить: $b=2-a$, $ab=a(2-a)=\frac{3}{4}$. Решая квадратное уравнение, находим обе пары решений.

12. (40 баллов) *Решите уравнение*

$$2024\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{m!}\right)=\frac{m}{n!}-\frac{1}{m!}$$

в натуральных числах.

Ответ: $m=n=1$ или $n=2022, m=2023$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $2024(m!-n!)=m\cdot m!-n!$, $(2024-m)m!=$ $=2023n!$. Далее рассмотрим несколько ситуаций.

Если $m=n$, то $2024-m=2023$, то есть $m=n=1$.

Если $m < n$, то можно записать $n = m+t$, где $t-$ натуральное число. После сокращения, уравнение принимает вид $2024-m = 2023(m+1)\dots(m+t)$. Левая часть не превосходит 2023, когда правая часть не меньше, чем $2023 \cdot 2$, следовательно, решений нет.

Если $m > n$, то $m = n + k$, где k — натуральное число. В этом случае уравнение принимает вид $(2024 - (n + k))(n + 1)(n + 2)\dots(n + k) = 2023$. Заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$, значит, в левой части последнего уравнения не более четырех сомножителей. Однако, если $k = 3$ (четыре сомножителя) или $k = 2$ (три сомножителя), то в левой части имеется произведение трех или двух последовательных натуральных чисел, чего не может быть. Следовательно, $k = 1$ и уравнение $(2024 - n - 1)(n + 1) = 2023$ имеет единственное натуральное решение $n = 2022$.