Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2022/2023 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (15 баллов) *Если срубить все деревья на одном гектаре леса, то можно изготовить 100 кубометров досок. Считая, что все деревья в лесу одинаковые, расположены равномерно, и что из каждого дерева можно получить $0,4\,м^3$ досок, определите площадь в квадратных метрах, на которой произрастает одно дерево. В ответе запишите целую часть полученного числа. (Целой частью числа называется наибольшее целое, не превосходящее данного числа.)*

Ответ: 40.

Решение. Найдем, сколько деревьев растет на одном гектаре леса: $\frac{100\,\text{м}^3}{0{,}4\,\text{м}^3} = 250$. Вспомним, что 1 га — это $100\ \text{м} \times 100\ \text{м} = 10\,000\,\text{м}^2$. Таким образом, одно дерево произрастает на $\frac{10\,000\,\text{м}^2}{250} = 40\,\text{м}^2$.

2. (15 баллов) *Ведьма Гингема заколдовала настенные часы так, что минутная стрелка движется в правильном направлении пять минут, потом три минуты в противоположном направлении, потом снова пять минут в правильном и так далее. Сколько минут покажет стрелка через 2022 минуты после того, как она указывала ровно на 12 часов перед началом пятиминутного промежутка правильного хода?*

Ответ: 28.

Решение. За 8 минут волшебного времени стрелка сместится на 2 минуты в направлении по часовой стрелке. Значит, за 2022 минуты она сделает 252 полных восьмиминутных цикла и еще 6 минут. Так как $252 \cdot 2 = 60 \cdot 8 + 24$, то стрелка пройдет 8 полных кругов, еще 24 минуты и потом 5 минут в правильном направлении и одну минуту в противоположном. Итого, $24 + 5 - 1 = 28$.

3. (35 баллов) *В стране имеются 4 южных города и 5 северных. Транспортное сообщение связывает каждый южный город с каждым северным городом в обоих направлениях; между другими парами городов транспортного сообщения нет. Билет в одну сторону из любого города A в любой город B стоит N рублей. Билет по тарифу «туда и обратно» по маршруту $A \to B \to A$, стоит $1,6N$ рублей. Путешественник стартует из южного города, собирается объехать все южные города и вернуться в точку старта. Определите минимально возможную сумму, которую путешественник должен будет потратить на билеты.*

Ответ: $4 \times 1,6N$ рублей.

Решение. Поскольку южные города не соединены транспортным сообщением друг с другом, то для того, чтобы проехать их все и вернуться обратно, потребуется 2×4

переездов. Любые два переезда стоят в сумме не менее $1,6N$ рублей, поэтому общие затраты составят как минимум $4 \times 1,6N$ рублей.

Приведем пример маршрута, для которого эта сумма реализуется. Пусть путешественник стартует из города Y_1, другие южные города посещает в порядке Y_2, Y_3 и Y_4, а все пересадки совершает в северном городе S_1. Тогда итоговый маршрут путешествия будет следующим: $Y_1 \to S_1 \to Y_2 \to S_1 \to Y_3 \to S_1 \to Y_4 \to S_1 \to Y_1$. А проезд по этому маршруту можно осуществить по билетам:

$Y_1 \to S_1 \to Y_1$ — это первый и последний переезд маршрута;

$S_1 \to Y_2 \to S_1$ — второй и третий переезды;

$S_1 \to Y_3 \to S_1$ — четвертый и пятый переезды;

$S_1 \to Y_4 \to S_1$ — шестой и седьмой переезды.

4. (35 баллов) *Фокусник Дэвид Копперфильд сообщил школьникам Мише и Маше по секрету одно и то же натуральное число. Маша некоторое количество раз умножила это число на 3, а Миша столько же раз прибавил к этому числу 2500. После того как ребята сравнили результаты своих вычислений оказалось, что у них снова одинаковые числа. Найдите три различных числа, которые Мише и Маше мог сообщить Копперфильд.*

Ответ: 1250, 625, 125.

Решение. Обозначим x — число Копперфильда, а k — сколько раз Маша умножила число на 3. Тогда имеет место равенство $x + 2500k = x \cdot 3^k$. Откуда $x = \dfrac{2500k}{3^k - 1}$. Подстановкой находим, что подходят $k = 1, 2, 4$, соответствующие значения $x_1 = 1250$, $x_2 = 625$, $x_3 = 125$.

5. (50 баллов) *Вася задумал натуральное число, не большее 100. Федя задает Васе вопросы вида «Чему равно неполное частное от деления задуманного числа на m?», где m — натуральное число, не меньшее 2, и выбирает его сам Федя. За какое наименьшее количество таких вопросов Федя сможет гарантированно определить задуманное Васей число?*

Ответ: 2.

Решение. Пусть Вася задумал число V. Тогда $V = k \cdot m + d$, где d может принимать значения от 0 до $m - 1$ включительно, и ответом Васи на вопрос Феди будет число k. Поскольку по условию $m > 1$, то вариантов для остатка d не меньше двух (исключение — случай, когда Вася задумал число 100 и Федя спрашивает о неполном частном от деления на 100). Следовательно, за один вопрос однозначно определить задуманное число мы можем не всегда.

Покажем, как это сделать за 2 вопроса. Первый вопрос Феди должен быть таким: «Чему равно частное от деления задуманного числа на 2?». Пусть Вася ответил: «Это частное равно k». Тогда Вася либо загадал либо число $2k$, либо $2k + 1$. Тогда второй вопрос

Феди должен быть «Чему равно частное от деления задуманного числа на $2k + 1$?». В случае, если Вася задумал число $2k$, ответом будет 0, а если задумал число $2k + 1$ — ответом будет 1.

6. (50 баллов) *В чемпионате по футболу участвуют 16 команд. По правилам чемпионата в каждом туре все участники разбиваются на пары, и в каждой паре матч проводится до выигрыша одной из команд. Команда-победительница проходит в следующий тур, а проигравшая команда выбывает из чемпионата. Известно, что более сильная команда всегда выигрывает у более слабой; но если в матче участвуют одинаковые по силе команды, то невозможно заранее предсказать, какая из них победит. Предполагается, что в течение чемпионата сила любой команды остается постоянной. Известно, что значения сил 16-ти участвующих в чемпионате команд — это 15 различных чисел. При любых ли таких значениях сил удастся разбивать в турах участников на пары так, чтобы в любом матче можно было гарантированно предсказать победителя? Если не при любых, то опишите все случаи, когда это сделать невозможно, и поясните почему.*

Ответ: Не всегда. Невозможно, если команды с одинаковой силой — самые сильные среди участников.

Решение. Заметим, что если в каком-либо туре участвуют только команды разной силы, то можно предсказать победителя в каждом матче этого и всех последующих туров. Это происходит потому что при любом разбиении на пары матчи будут проходить между разными по силе командами, т. е. будет заранее известно, какая из них выиграет. Поскольку у нас силы команд принимают ровно 15 значений, то, по принципу Дирихле, найдутся ровно 2 команды с одинаковой силой — пусть это команды i и j. Для удобства будем считать, что значения сил команд (s_k) — это натуральные числа от 1 до 15.

Докажем, что:

а) если $s_i = s_j \leqslant 14$, то мы можем разбивать участников на пары в турах так, чтобы иметь возможность предсказать победителей всех матчей;

б) если $s_i = s_j = 15$, этого сделать нельзя.

а). В первом туре составим одну пару следующим образом: команда i и команда с силой 15; остальных участников разобьем на пары любым образом. Легко заметить, что при таком разбиении на пары во всех матчах этого тура встречаются разные по силе команды, поэтому предсказать победителя можно во всех матчах этого тура. Также очевидно, что команда i проиграет матч первого тура и, следовательно, не пройдет в следующий тур. Поэтому во втором и последующих турах чемпионата будут участвовать команды разной силы и предсказать победителей матчей можно будет при любом разбиении на пары.

б). Поскольку команды i и j — самые сильные, то они будут выигрывать во всех матчах с другими командами. А поскольку количество команд-участников с каждым туром становится в 2 раза меньше, то в конце концов их останется две. Таким образом, команды i и j встретятся, самое позднее, в последнем туре чемпионата, т. е. найдется хотя бы один матч, предсказать победителя которого невозможно.

7. (50 баллов) *На доске были записаны два примера на умножение двух натуральных чисел, причем в одном из примеров числа были одинаковыми. Хулиган Петя стер и исходные числа, и почти все цифры чисел–результатов умножения, оставив только по три последние цифры:* $\ldots 689$ *и* $\ldots 759$ *Может ли теперь отличник Миша определить, какие из этих трех цифр принадлежат числу, которое получалось в результате умножения одинаковых чисел?*

Ответ: Может — это 689.

Первое решение. *Утверждение: хотя бы одна из двух последних цифр точного квадрата натурального числа обязательно четная.* Тогда второе число отпадает. Пример для первого числа: $133 \cdot 133 = 17689$.

Доказательство *утверждения:* для четных чисел утверждение верно, рассмотрим квадраты нечетных чисел. Обозначим предпоследнюю цифру исходного числа за n, последнюю — за m, где $m \in \{1,3,5,7,9\}$, все остальные разряды числа — за k. Тогда

$$(\overline{knm})^2 = (100k + 10n + m)^2 = \left[\begin{array}{l} (100k + 10n + 1)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot 2n + 1, \\ (100k + 10n + 3)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot 6n + 9, \\ (100k + 10n + 5)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot 2 + 5, \\ (100k + 10n + 7)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot (4n + 4) + 9, \\ (100k + 10n + 9)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot (8n + 8) + 1. \end{array}\right.$$

Во всех случаях предпоследняя цифра квадрата четная.

Второе решение. Будем основываться на следующем *утверждении: точный квадрат натурального числа либо делится на 4, либо при делении на 8 дает остаток 1.* Действительно, если исходное число четное, то его квадрат делится на 4, а если исходное число нечетное, то его можно представить в виде $8q + r$, где $r \in \{1,3,5,7\}$. Тогда $(8q + {} + r)^2 = 8 \cdot (\ldots) + 1$. Имея перед глазами последние три цифры числа, можно проверить выполнение признака делимости на 4 или найти остаток от деления числа на 8.