Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2022/2023 учебный год

Задания для 8–9 классов

1. (10 баллов) *В стране имеются 4 южных города и 5 северных. Транспортное сообщение связывает каждый южный город с каждым северным городом в обоих направлениях; между другими парами городов транспортного сообщения нет. Путешественник стартует из определенного южного города, собирается объехать все южные города по одному разу и вернуться в точку старта. Сколько существует различных вариантов маршрутов такого путешествия?*

а) $4! \times 5!$*;*
б) $3! \times 5^4$*;*
в) $4^4 \times 4!$*;*
г) $3^4 \times 5!$*;*
д) другой ответ.

Ответ: б).

Решение. Так как между южными городами нет прямого транспортного сообщения, то при переезде из одного южного города в другой южный город пересадку придется делать в каком-либо северном городе. Количество способов объехать оставшиеся южные города равно $(4-1)!$; количество способов выбрать северный город для одной пересадки — 5. Чтобы вернуться в исходный южный город, нужно сделать 4 пересадки в северных городах. Отсюда получаем ответ.

2. (10 баллов) *По кругу выложены n шариков, белых и красных. Среди любых пяти шариков, лежащих подряд, ровно два — белые. При каком n такое возможно?*

а) 2021;
б) 2022;
в) 2023;
г) 2024;
д) ни один из указанных ответов не является верным.

Ответ: д).

Решение. Начнем нумерацию шариков в круге с какого-либо белого шарика. Среди первых пяти шариков, по условию, ровно два белых — первый и i-й, где i — это одно из чисел от 2 до 5 включительно. Теперь рассмотрим пятерку шариков, начиная со второго: на местах во второго по пятое белым является только i-й шарик; следовательно, чтобы в этой пятерке было ровно два белых, на шестом месте тоже должен стоять белый. Аналогичными рассуждениями получаем, что белые шарики должны стоять на местах с номерами $5k+1$, $k=0,1,\ldots$ и на местах с номерами $5k+i$, $k=0,1,\ldots$. Следовательно, круг с такими условиями на расположение шариков должен состоять из делящегося на 5 количества шариков.

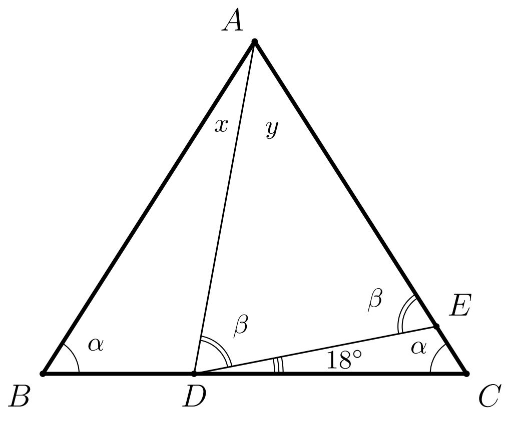
3. (20 баллов) *На факультет журналистики университета Сказочного Содружества поступают 4 курицы. На факультете имеются 2 места на дневном отделении и 3 места на вечернем. Считая, что все 4 курицы поступят на факультет, определите количество исходов, в которых на вечернее отделение поступят ровно две курицы.*

Ответ: 6.

Решение. На факультете имеются суммарно 5 мест, на которые поступают 4 абитуриента. Так как на вечернее отделение поступит ровно две курицы, то другие две поступят на дневное отделение. Количество способов выбрать из 4 абитуриентов двух — тех, которые поступят на дневное отделение, — равно $C_4^2=6$.

4. (30 баллов) *На сторонах BC и AC равнобедренного треугольника ABC $(AB=AC)$ нашлись точки D и E соответственно такие, что $AE=AD$, $\angle EDC=18^\circ$. Найдите величину угла $\angle BAD$.*

Ответ: 36°.



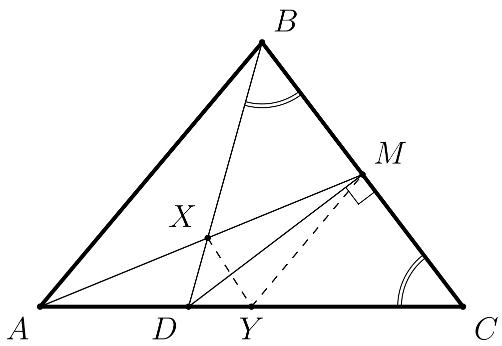
Решение. Обозначим углы, как указано на рисунке. Угол ADC является внешним для треугольника ADB; отсюда, $\beta+18^\circ=\alpha+x$. Углы ABC и ACB — углы при основании равнобедренного треугольника ABC; отсюда $\alpha=\frac{180^\circ-(x+y)}{2}$. Углы ADC и AED — углы при основании равнобедренного треугольника ADE; отсюда $\beta=\frac{180^\circ-y}{2}$. Подставим эти выражения в соотношение для угла ADC:

$$\frac{180^\circ-y}{2}+18^\circ=\frac{180^\circ-(x+y)}{2}+x.$$

Упрощая выражение, получаем, что $18^\circ=\frac{x}{2}$, то есть $x=36^\circ$.

5. (30 баллов) *Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. На отрезке AC нашлась такая точка D, что DM и BC перпендикулярны. Отрезки AM и BD пе-*

ресекаются в точке X. Оказалось, что $AC = 2BX$. Докажите, что X — середина отрезка AM.



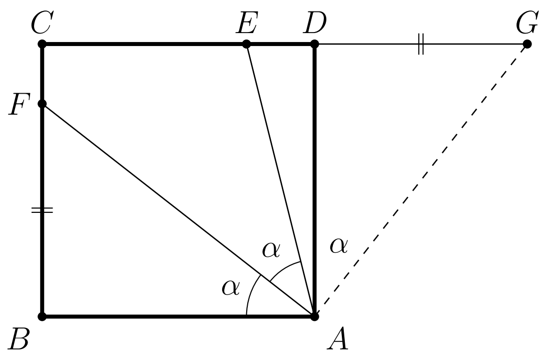
Решение. Поскольку $DM \perp BC$ и $BM = MC$, то DM — высота и медиана в треугольнике DBC. Следовательно, треугольник DBC равнобедренный и $DB = DC$.

На отрезке DC отметим точку Y так, чтобы $DX = DY$. Треугольник DXY получится равнобедренным с основанием XY. Также, по построению, $BX = CY$. Отсюда получаем, что $XY \| BC$.

Поскольку $AC = 2BX = 2CY$ и точка Y лежит на AC, то она — середина AC. Поэтому XY — средняя линия треугольника AMC, тем самым, $AX = XM$.

6. (30 баллов) *Маша отмечает на стороне CD квадрата $ABCD$ точку E и находит длину отрезка AE. Миша проводит биссектрису угла BAE, отмечает точку F пересечения этой биссектрисы и стороны BC квадрата и находит сумму длин отрезков BF и ED. Может ли Маша выбрать точку E так, чтобы найденная ею длина отрезка оказалась больше, чем результат у Миши?*

Ответ: Не может, их результаты всегда равны.



Решение. На продолжении стороны CD квадрата за точку D отложим отрезок DG, равный отрезку BF. Сравним длины отрезков AE (результат Маши) и EG (результат Миши). Треугольники ABF и ADG равны по двум катетам. Обозначим

$$\angle BAF = \angle FAE = \angle DAG = \alpha.$$

Выразим углы треугольника AEG:

$$\angle EAG = \angle EAD + \angle DAG = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle EGA = 90^\circ - \angle DAG = 90^\circ - \alpha,$$

следовательно, треугольник AEG — равнобедренный и $AE = EG = BF + ED$.

7. (40 баллов) *На доске написаны числа 1^2, 2^2, 3^2, ..., 1000^2. Двое игроков по очереди стирают по одному из чисел на доске до тех пор, пока на доске не останется всего два числа. Если разность этих двух чисел делится на 13, то выигрывает второй игрок, иначе — выигрывает первый. Как должен действовать второй игрок, чтобы выиграть вне зависимости от действий соперника?*

Ответ: Второй игрок должен стирать число, основание которого в сумме со стертым первым игроком дает 1001.

Решение. Пусть на доске остались числа x^2 и y^2. Тогда $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Чтобы эта величина делилась на 13, необходимо, чтобы либо $x+y$, либо $x-y$ делилось на 13. Заметим, что $1+1000 = 1001 = 13 \cdot 77$. Следовательно, $n + (1001 - n)$, где $n = 1, \ldots, 500$, также будет делиться на 13. Таким образом, все выписанные на доске числа можно разбить на пары, разность элементов в которых делится на 13. Поэтому если второй игрок будет стирать «парное» число тому, которое стер первый игрок, на доске в итоге останутся два числа, составляющие одну «пару» и их разность будет делиться на 13.

8. (40 баллов) *В начале каждого урока физкультуры 30 школьников разбиваются на 3 команды по 10 человек в каждой. Докажите, что найдутся два школьника, которые были в одной команде три урока подряд.*

Первое решение. Возьмем всех школьников из какой-либо команды с первого урока и посмотрим, как они распределятся по трем командам на втором уроке. Так как распределяются 10 человек по трем командам, то по принципу Дирихле найдется команда, в которую попадут как минимум 4 человека.

Теперь возьмем этих четверых и посмотрим на их распределение по командам на третьем уроке. Поскольку команд по-прежнему три, то по принципу Дирихле найдется такая команду, в которой будет как минимум двое человек из рассматриваемых четырех. Легко заметить, что эти двое были в одной команде и на первом уроке, и на втором, и оказались в одной команде на третьем.

Второе решение. На каждом уроке физкультуры каждый школьник попадает в одну из трех команд; будем обозначать команды цифрами 1, 2 и 3. Поэтому участие в командах на трех уроках подряд для каждого школьника можно описать тройкой чисел $x - y - z$, где каждое из x, y и z принимается значений 1, 2 или 3. Таких различных троек существует $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Но школьников по условию задачи 30, следовательно, по принципу Дирихле найдутся два школьника, участие которых в командах описывается одинаковыми тройками. Это те школьники, которые были в одной команде в течение трех уроков подряд.

9. (40 баллов) *Про действительные числа a, b и c известно, что $ab + bc + ca = 3$. Какие значения может принимать выражение $\frac{a(b^2+3)}{a+b} + \frac{b(c^2+3)}{b+c} + \frac{c(a^2+3)}{c+a}$?*

Ответ: 6.

Решение. Рассмотрим первое слагаемое искомого выражения. Воспользуемся условием, что $ab + bc + ca = 3$. Тогда

$$b^2 + 3 = b^2 + ab + bc + ca = (b + a)(b + c).$$

Следовательно,

$$\frac{a(b^2 + 3)}{a + b} = \frac{a(b + a)(b + c)}{a + b} = a(b + c).$$

Аналогично для второго и третьего слагаемого получаем

$$\frac{b(c^2 + 3)}{b + c} = b(c + a), \quad \frac{c(a^2 + 3)}{c + a} = c(a + b).$$

Таким образом,

$$\frac{a(b^2 + 3)}{a + b} + \frac{b(c^2 + 3)}{b + c} + \frac{c(a^2 + 3)}{c + a} = a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) =$$
$$= ab + ac + bc + ba + ca + cb = 2(ab + bc + ca) = 2 \times 3 = 6.$$