**1.** Кузнечик прыгает по числовой прямой. Каждый свой прыжок он может совершить в любом направлении. Он начинает в точке 0 прыжком единичной длины. Каждый следующий прыжок должен быть на пять больше предыдущего (т. е. первый прыжок длины 1, второй длины 6, третий длины 11 и т. д.). За какое наименьшее число прыжков кузнечик сможет оказаться в точке 2024?

**Ответ:** 31.

**Решение.** Поскольку

$$1+6+11+16+\ldots+136=28+5(1+2+\ldots+27)=28+5\cdot\frac{27\cdot 28}{2}=1918<2024,$$

за 28 прыжков допрыгнуть не удастся. Поэтому потребуется не менее 29 прыжков. Но прыжки с нечетными номерами меняют четность положения кузнечика. Поэтому после 29 прыжков кузнечик окажется на нечетном числе, тридцатый прыжок четности не поменяет и, значит, после 30 прыжков кузнечик также будет на нечетном числе и, в частности, не может оказаться в точке 2024. Следовательно, потребуется не менее 31 прыжка.

Покажем, что за 31 прыжок можно попасть в 2024. Поскольку

$$1+6+11+16+\ldots+156=31+5(1+2+\ldots+30)=31+5\cdot\frac{30\cdot 31}{2}=2356,$$

кузнечик все время прыгая вправо окажется в точке 2512, поэтому он перескакивает цель на 332. Таким образом, ему нужно в сумме на 166 прыгнуть в другую сторону. Например, подойдут прыжки на 1, 11, 21, 31, 41 и 61.

**2.** Найдите угол $\alpha$, если известно, что $0^\circ<\alpha<90^\circ$ и

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)-2}{(1-\operatorname{tg}1^\circ)(1-\operatorname{tg}3^\circ)-2}.$$

**Ответ:** $\alpha=41^\circ$.

**Первое решение.** По условию

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)-2}{(1-\operatorname{tg}1^\circ)(1-\operatorname{tg}3^\circ)-2}=\frac{1-\operatorname{tg}1^\circ-\operatorname{tg}3^\circ-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}{1+\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}3^\circ-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}3^\circ}{1-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}}{1+\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}3^\circ}{1-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}4^\circ=\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}3^\circ}{1-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}$, имеем соотношение

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}4^\circ}{1+\operatorname{tg}4^\circ}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}4^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}4^\circ}=\operatorname{tg}(45^\circ-4^\circ)=\operatorname{tg}41^\circ.$$

Стало быть, $\alpha=41^\circ$.

**Второе решение.** По условию

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)-2}{(1-\operatorname{tg}1^\circ)(1-\operatorname{tg}3^\circ)-2} = \frac{(\cos 1^\circ+\sin 1^\circ)(\cos 3^\circ+\sin 3^\circ)-2\cos 1^\circ\cdot\cos 3^\circ}{(\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)(\cos 3^\circ-\sin 3^\circ)-2\cos 1^\circ\cdot\cos 3^\circ}.$$

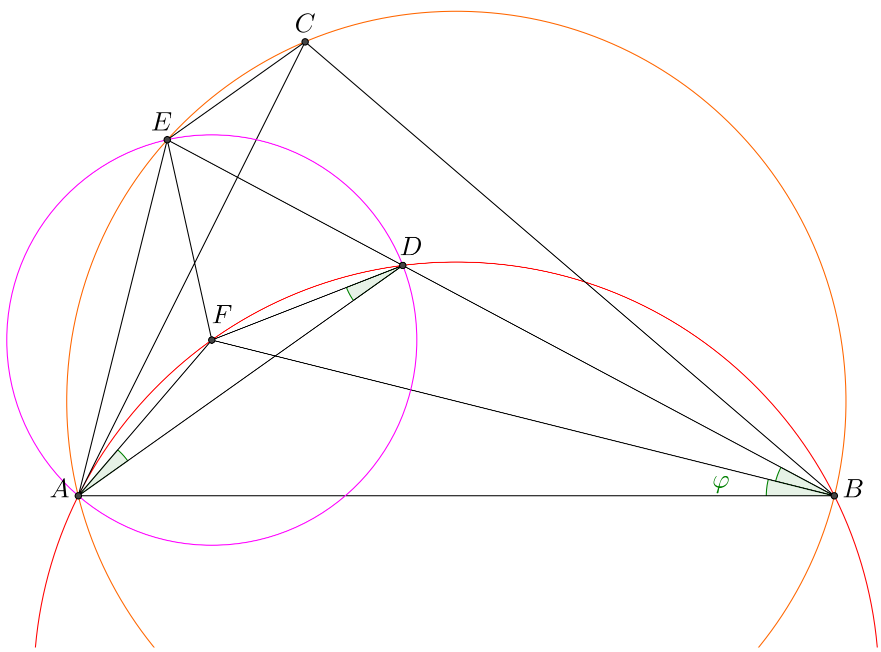
Поскольку $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\sin(45^\circ \pm x)$, Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\sin 46^\circ\cdot\sqrt{2}\sin 48^\circ - 2\cos 1^\circ\cos 3^\circ}{\sqrt{2}\sin 44^\circ\cdot\sqrt{2}\sin 42^\circ - 2\cos 1^\circ\cos 3^\circ} = \frac{\sin 46^\circ\sin 48^\circ-\cos 1^\circ\cos 3^\circ}{\sin 42^\circ\sin 44^\circ-\cos 1^\circ\cos 3^\circ} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(\cos 2^\circ-\cos 94^\circ)-\frac{1}{2}(\cos 2^\circ+\cos 4^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 2^\circ-\cos 86^\circ)-\frac{1}{2}(\cos 2^\circ+\cos 4^\circ)} = \frac{\cos 94^\circ+\cos 4^\circ}{\cos 86^\circ+\cos 4^\circ} = \frac{\cos 4^\circ-\sin 4^\circ}{\cos 4^\circ+\sin 4^\circ} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-4^\circ)}{\sqrt{2}\sin(45^\circ+4^\circ)} = \frac{\sin 41^\circ}{\cos 41^\circ} = \operatorname{tg}41^\circ.$$

Стало быть, $\alpha = 41^\circ$.

**3.** Дан остроугольный треугольник $ABC$, меньший угол которого $\angle ABC = 40^\circ$. Внутри треугольника выбрана такая точка $D$, что $\angle BAC + \angle ADB = 180^\circ$ и $2\angle ACB + \angle DBA = 180^\circ$. Через точку $C$ провели прямую, параллельную прямой $AD$, она пересекла прямую $BD$ в точке $E$. Биссектрисы углов $\angle ABD$ и $\angle CAD$ пересекаются в точке $F$. Найдите угол $\angle DFE$.

**Ответ:** $80^\circ$.




**Решение.** Положим для краткости $\angle ABF = \varphi$, тогда $\angle DBF = \varphi$ и $\angle DBA = 2\varphi$. По условию

$$2\angle ACB + 2\varphi = 2\angle ACB + \angle DBA = 180^\circ$$

и, значит, $\angle ACB = 90^\circ - \varphi$.

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle DBA - \angle ADB = 180^\circ - 2\varphi - (180^\circ - \angle BAC) = \angle BAC - 2\varphi.$$

Следовательно,

$$\angle DAF = \frac{\angle DAC}{2} = \frac{\angle BAC - \angle BAD}{2} = \varphi$$

и четырехугольник $AFDB$ вписанный. Таким образом, $\angle ADF = \angle ABF = \varphi$, значит, треугольник $AFD$ равнобедренный и, в частности, $FA = FD$. Поскольку $AF$ — биссектриса угла $\angle CAD$, а прямые $AD$ и $CE$ параллельны, $\angle ACE = \angle CAD = 2\varphi = \angle ABE$. Следовательно, четырехугольник $AECD$ является вписанным и поэтому

$$\angle AED = \angle AEB = \angle ACB = 90^\circ - \varphi = \frac{\angle AFD}{2}.$$

Стало быть, точка $F$ является центром описанной окружности треугольника $ADE$ и, значит, $\angle DFE = 2\angle DAE$. Осталось заметить, что

$$\angle DAE = 180^\circ - AED - \angle ADE = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = \angle ABC = 40^\circ,$$

откуда получаем ответ $\angle DFE = 80^\circ$.

**4.** Решите в целых числах уравнение $k^2 + m^2 = 5 \cdot 2023^n + 77$.

**Ответ:** $(\pm1, \pm9, 0)$, $(\pm9, \pm1, 0)$, $(\pm56, \pm84, 1)$ и $(\pm84, \pm56, 1)$.

**Решение.** Если $n < 0$, то левая часть уравнения будет целой, а правая нецелой. Если $n = 0$, то $k^2 + m^2 = 82$. Поскольку квадраты дают остатки 0, 1 и 4 от деления на пять, числа $k^2$ и $m^2$ дают остаток 1 от деления на 5, кроме того $|k| \leqslant 9$ и $|m| \leqslant 9$. Стало быть, $k = \pm1$ и $m = \pm9$ или $k = \pm9$ и $m = \pm1$ и других вариантов быть не может.

Пусть $n \geqslant 1$. Поскольку 2023 делится на семь, в этом случае правая часть делится на семь. Квадраты целых чисел могут давать остатки 0, 1, 2 и 4 от деления на семь. Сумма двух таких остатков равна нулю только в случае, когда они оба равны нулю. Таким образом, $k$ и $m$ делятся на семь. Стало быть, $k = 7k_1$ и $m = 7m_1$ для некоторых целых чисел $k_1$ и $m_1$. Следовательно,

$$7k_1^2 + 7m_1^2 = 5 \cdot 289 \cdot 2023^{n-1} + 11.$$

Если $n \geqslant 2$, то число $7k_1^2 + 7m_1^2 - 5 \cdot 289 \cdot 2023^{n-1}$ делится на семь, что невозможно, поскольку оно равно 11. Стало быть, $n = 1$ и уравнение принимает вид

$$7k_1^2 + 7m_1^2 = 5 \cdot 289 + 11 = 1456 = 7 \cdot 208.$$

Таким образом, $k_1^2 + m_1^2 = 208 = 13 \cdot 16$. Поскольку квадраты при делении на 4 дают лишь остатки 0 и 1, оба числа $k_1$ и $m_1$ четны и тогда $k_1 = 2k_2$ и $m_1 = 2m_2$ для некоторых целых чисел $k_2$ и $m_2$. Стало быть, $k_2^2 + m_2^2 = 13 \cdot 4$. Аналогично получаем, что $k_2 = 2k_3$, $m_2 = 2m_3$ и $k_3^2 + m_3^2 = 13$. Но у такого уравнения решения найти совсем легко: $k_3 = \pm2$ и $m_3 = \pm3$ или $k_3 = \pm3$ и $m_3 = \pm2$. Тогда $k = \pm56$ и $m = \pm84$ или $k = \pm84$ и $m = \pm56$.

**5.** В стране 750 городов. Некоторые из них соединены беспосадочными двухсторонними авиалиниями. Известно, что среди любых 375 городов есть хотя бы 375 пар городов, соединенных друг с другом авиалинией. Какое наименьшее возможное количество авиалиний может быть в этой стране.

**Ответ:** 1875.

**Решение.** Разобьем 750 городов на 125 групп по 6 городов в каждой и любые два города в каждой группе соединим авиалинией. Тогда в каждой группе по $\frac{6\cdot5}{2} = 15$ авиалиний и общее количество авиалиний $125 \cdot 15 = 1875$. Покажем, что эти города удовлетворяют условию задачи. Действительно, рассмотрим какие-то 375 городов. Пусть $n_1$ из них из первой группы, $n_2$ из второй, $\ldots$, $n_{125}$ из 125-й группы. Тогда общее количество авиалиний между этими городами равно

$$m = \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} + \ldots + \frac{n_{125}(n_{125}-1)}{2}.$$

Поскольку неравенство $x(x-1) \geqslant 5x-9$ справедливо для всех $x$,

$$2m \geqslant (5n_1-9)+(5n_2-9)+\ldots+(5n_{125}-9) = 5(n_1+n_2+\ldots+n_{125}) - 9\cdot 125 = \\ = 5\cdot 375 - 9\cdot 125 = (15-9)\cdot 125 = 750.$$

Стало быть, $m \geqslant 375$.

Докажем теперь, что общее количество авиалиний всегда не меньше, чем 1875. Разобьем города на две одинаковые по размеру группы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таким образом, что авиалиний между городами из $\mathcal{A}$ наименьшее возможное количество. Рассмотрим пару городов $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$. Пусть город $A$ соединен авиалиниями с $a$ городами из $\mathcal{A}$, а город $B$ соединен авиалиниями с $b$ городами из $\mathcal{A}$. Тогда $a \leqslant b$, поскольку в противном случае можно было бы поменять местами города $A$ и $B$, уменьшив количество авиалиний между городами из $\mathcal{A}$.

Если каждый город из $\mathcal{B}$ соединен авиалинией хотя бы с тремя городами из $\mathcal{A}$, то общее количество авиалиний будет не меньше чем $375+3\cdot 375+375 = 1875$ (хотя бы 375 авиалиний между городами из $\mathcal{A}$, хотя бы $3\cdot 375$ авиалиний ведет из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ и хотя бы 375 авиалиний между городами из $\mathcal{B}$). В этом случае нужное неравенство доказано.

Если же найдется город $B$ из $\mathcal{B}$, соединенный авиалиниями не более чем с двумя городами из $\mathcal{A}$, то для любого города из $\mathcal{A}$ есть не больше двух авиалиний ведущих в города из $\mathcal{A}$. Но тогда общее количесвто авиалиний между городами из $\mathcal{A}$ не больше 375. Но по условию оно не меньше, чем 375, поэтому для любого города из $\mathcal{A}$ есть ровно две авиалинии ведущие в города из $\mathcal{A}$. Пусть $A$ — один из городов, с которыми соединен город $B$. Рассмотрим набор из 375 городов: город $B$ и все города из $\mathcal{A}$, за исключением $A$. Посчитаем общее количество авиалиний между городами этого набора. Между выбранными городами из $\mathcal{A}$ в точности 373 авиалинии (две авиалинии ведут в город $A$) и еще одна авиалиния ведет в город $B$ (вторая авиалиния из $B$ ведет в $A$), итого получилось 374 авиалинии, что противоречит условию. Таким оборзом, этот случай невозможен.