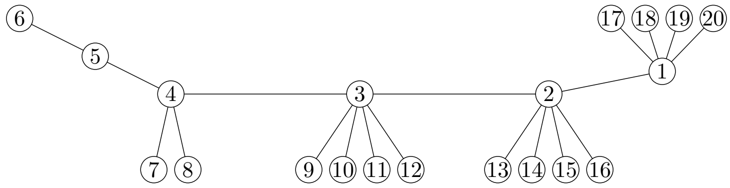
Решения

1. Ответ: потребуется покрасить 11 кружков.



а) Достаточно закрасить кружки 7–11, 14–19. При докрашивании мы можем сразу докрасить все кружки, «из которых растут ноги», т. е. 1–4. После этого закрасим все остальные кружки.

б) Заметим, что среди кружков 9—12 должно быть не меньше трех закрашенных. В противном случае, даже если вся остальная сороконожка уже закрашена, у кружка 3 остаются два незакрашенных соседа и докрасить сороконожку в этом месте невозможно. Аналогично в группах кружков 13–16 и 17–20 должно быть по три закрашенных. Кроме того, в группе кружков 5–8 должно быть не меньше двух закрашенных кружков (иначе нам не удастся докрасить обе ноги 7 и 8 или хвост 5-6 и одну из ног). Итого, требуется покрасить не меньше 11 кружков.

2. Ответы: а) да, б) да, в) нет.

а) Возьмем внутри шестиугольника треугольник со стороной 3 клетки. Он состоит как раз из 9 клеток, а каждая из его шести проекций имеет длину 3.

б) Тут, знаете ли, четность ни при чем. Сумма проекций клетки, не касающейся границы шестиугольника, равна 6. При этом нетрудно подобрать две клетки, у которых для двух разных направлений проекции совпадают. Например на рисунке совпадают горизонтальная проекция вправо верхней темной клетки и «верхне-правая» проекция нижней клетки. В результате сумма длин проекций этих двух клеток равна 11.

Добавляя к такой паре клеток еще 7 клеток с непересекающимися проекциями (например можно взять клетку и сдвинуть ее вниз 6 раз на удвоенную ширину горизонтальной полосы), получаем 9 клеток с суммой проекций, равной $6 \cdot 9 - 1 = 53$.

в) Сумма проекций клетки, не касающейся границы шестиугольника, равна 6. Поэтому 9 клеток не могут иметь сумму проекций больше чем 54.

3. а) При $1 \leqslant k \leqslant 29$ посадим $(31+k)$-го кролика в k-ю клетку. Если числа $31+k$ и k имеют общий делитель, то этот же делитель имеет их разность $(31+k) - k = 31$. Но при указанных k число k не делится на 31. Поэтому правило рассадки соблюдено и клетки со первой по 29-ю уже заняты. Осталось посадить 31-го кролика в 30-ю клетку.

б) Имеется 7 кроликов, номера которых являются простыми числами: 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. Этих кроликов можно произвольно пересаживать по тем 7 клеткам, которые они занимают, потому что номер любого из этих кроликов — простое число, которое больше номера любой клетки, из-за чего оно не может иметь общих делителей с номером клетки. Количество способов рассадить 7 кроликов по 7 клеткам равно 7!=5040. Возьмем произвольную подходящую расстановку кроликов (например из п. а) и построим новые перестановки, меняя местами указанных 7 кроликов. Мы получим множество из 5040 подходящих перестановок.

4. Допустим, что нашлось некоторое n_1, для которого последовательность не содержит 1. Тогда все числа в последовательности, начиная со второго, могут иметь в разложении на множители только простые множители 2 и 3. Далее в рассуждениях считаем, что $k > 1$. Заметим, что если n_k делится на простое число $p \in \{2, 3\}$, то $5n_k + 1$, очевидно, не делится на p и, следовательно, n_{k+1} не делится на p. Отсюда следует, что в последовательности n_k чередуются степени 2 и 3. Проверим, что последовательность убывает и из-за этого в ней все-таки должна содержаться 1.

Экспериментируя с $n_k \in \{2, 2^2, 3, 3^2\}$, видим, что в этих случаях последовательность быстро приходит к 1. Поэтому можно считать, что чередующиеся степени имеют показатели не меньше 3.

Пусть $n_k = 2^m$ (где $m \geqslant 2$), $n_{k+1} = 3^\ell$. Тогда или $n_{k+1} = 5n_k+1$, или 3^ℓ получается из числа $5n_k+1$ сокращением на какие-то простые множители не меньшие 7 (потому что это число не делится на 5). В первом случае n_{k+2} — это степень двойки, на которую делится число

$$5n_{k+1} + 1 = 5(5n_k + 1) + 1 = 25 \cdot 2^m + 6,$$

т. е. $n_{k+2} = 2$, что не соответствует нашим ограничениям — слишком маленький показатель. Во втором случае $n_{k+1} \leqslant \frac{5n_k+1}{7} < n_k$.

Теперь рассмотрим случай $n_k = 3^\ell$, $n_{k+1} = 2^m$ (где $\ell \geqslant 2$, $m \geqslant 3$). Здесь аналогично или $n_{k+1} = 5n_k + 1$, или 2^m получается из числа $5n_k + 1$ сокращением на какие-то простые множители, не меньшие 7. Второй случай опять ведет к убыванию, что нам и требуется. Разберем первый случай

$$5 \cdot 3^\ell = 2^m - 1.$$

Правая часть делится на 3 только при четных m, пусть $m = 2s$, мы можем считать, что $s > 1$. Тогда разложим правую часть на множители

$$5 \cdot 3^\ell = 2^{2s} - 1 = (2^s + 1)(2^s - 1).$$

Поскольку нечетные множители в правой части взаимно просты (так как их разность равна 2) и больше 1, равенство было бы возможно только в случае когда одна из скобок равна 5, а другая равна 3^ℓ, но разность этих чисел равна 2 только при $\ell = 1$. Значит, первый случай при наших ограничениях невозможен.

5. Это теорема Ловаса. В некоторой компании людей каждый знаком с не более чем $s + t + 1$ человеком. Тогда можно разбить всех людей на две части — A и B так, что в A каждый знаком с не более чем s, а в B каждый знаком с не более чем t людьми.

Доказательство. Если A — это какое-то множество людей, то через $|A|$ будем обозначать количество знакомств в этом множестве. Возьмем разбиение исходной толпы на части A и B, для которого величина $t|A| + s|B|$ минимально возможная. Это разбиение нам подходит: если в части A кто-либо имеет не меньше $s + 1$ знакомых, пересадим этого человека в часть B — там у него будет не более t знакомых. Тогда в подсчитываемой сумме первое слагаемое $t|A|$ уменьшится по крайней мере на $t(s + 1)$, а второе увеличится не более чем на ts. То есть, в результате пересадки контрольная сумма уменьшится, что невозможно. Аналогично разбирается случай, когда в части B кто-либо имеет не меньше $t + 1$ знакомого.