1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = 2x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами, при любом вещественном x удовлетворяющий неравенству $20f(x) + 19 \geqslant 0$. Докажите, что $2f(x) + 1 \geqslant 0$ при любом вещественном x.

Решение. Поскольку все коэффициенты трехчлена $f(x)$ целые, он принимает в целых точках целые значения и эти значения не меньше чем $-\frac{19}{20}$. Поэтому значения трехчлена $f(x)$ во всех целых точках неотрицательны. Следовательно, расстояние между его корнями не превосходит единицы, в противном случае между корнями нашлась хотя бы одна целая точка и значение в ней было бы отрицательным. Но расстояние между корнями равно $\frac{1}{2}\sqrt{d}$, где d — дискриминант трехчлена, т. е. $d = a^2 - 8b$. Стало быть, $d \leqslant 4$. Осталось заметить, что наименьшее значение трехчлена равно $-\frac{d}{8} \geqslant -\frac{1}{2}$.

2. Есть 35 кроликов и 35 клеток, клетки пронумерованы числами от 1 до 35, а кролики — числами от 36 до 70. Кроликов рассаживают по клеткам (по одному кролику в клетку) так, чтобы номер каждого кролика был взаимно прост с номером его клетки. Докажите, что количество способов так рассадить кроликов по клеткам не меньше, чем 40 тысяч.

Решение. Сначала приведем один способ рассадить кроликов по клеткам. При $36 \leqslant k \leqslant 70$ посадим k-го кролика в клетку с номером $71-k$. Если числа k и $71-k$ имеют общий делитель, то этот же делитель имеет их сумма $k + (71 - k) = 71$, являющаяся простым числом. Но число k не делится на 71. Поэтому правило рассадки соблюдено.

Имеется восемь кроликов, номера которых являются простыми числами: 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 и 67. Этих кроликов можно произвольно пересаживать по тем восьми клеткам, которые они занимают, потому что номер любого из этих кроликов — простое число, которое больше номера любой клетки, из-за чего оно не может иметь общих делителей с номером клетки. Количество способов рассадить 8 кроликов по 8 клеткам равно $8! = 40\,320$. Мы уже предъявили 40 320 способов рассадки, поэтому общее количество способов не меньше 40 000.

3. Для любого натурального числа n докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[1]{2!}} + \frac{1}{\sqrt[2]{4!}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6!}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8!}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \geqslant \frac{n}{n+1}.$$

(Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.)

Решение. Покажем, что

$$\frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}. \qquad (*)$$

Для этого достаточно проверить неравенство $(k(k+1))^k \geqslant (2k)!$. Для его доказательства разобьем все множители, составляющие $(2k)!$ на пары j и $2k+1-j$ (здесь j пробегает числа от 1 до k) и заметим, что произведение чисел в каждой паре не превосходит $k(k+1)$. Действительно,

$$k(k+1) - j(2k+1-j) = (k^2+k) - (2kj + j - j^2) = (k-j)^2 + (k-j) \geqslant 0.$$

Просуммируем неравенства $(*)$ по k от 1 до n и получим требуемое.

4. Возьмем произвольное натуральное число n_1. Вычислим значение $5n_1+1$ и уберем из его разложения на простые множители все множители, кроме двоек и троек. Полученное число назовем n_2. Например:

$$n_1 = 25 \quad \to \quad 5 \cdot 25 + 1 = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad \to \quad n_2 = 18,$$
$$n_1 = 24 \quad \to \quad 5 \cdot 24 + 1 = 121 = 11^2 \quad \to \quad n_2 = 1,$$
$$n_1 = 22 \quad \to \quad 5 \cdot 22 + 1 = 111 = 3 \cdot 37 \quad \to \quad n_2 = 3.$$

Потом вычислим значение $5n_2+1$ и уберем из этого числа все простые множители, кроме двоек и троек, полученное число назовем n_3 и т. д.

Докажите, что с какого бы натурального числа n_1 мы ни начали, через некоторое время в этой последовательности встретится число 1.

Решение. Допустим, что нашлось некоторое n_1, для которого последовательность не содержит 1. Тогда все числа в последовательности, начиная со второго, могут иметь в разложении на множители только простые множители 2 и 3. Далее в рассуждениях считаем, что $k > 1$. Заметим, что если n_k делится на простое число $p \in \{2, 3\}$, то $5n_k + 1$, очевидно, не делится на p и, следовательно, n_{k+1} не делится на p. Отсюда следует, что в последовательности n_k чередуются степени 2 и 3. Проверим, что последовательность убывает и из-за этого в ней все-таки должна содержаться 1.

Экспериментируя с $n_k \in \{2, 2^2, 3, 3^2\}$, видим, что в этих случаях последовательность быстро приходит к 1. Поэтому можно считать, что чередующиеся степени имеют показатели не меньше 3.

Пусть $n_k = 2^m$ (где $m \geqslant 2$), $n_{k+1} = 3^\ell$. Тогда или $n_{k+1} = 5n_k + 1$, или 3^ℓ получается из числа $5n_k+1$ сокращением на какие-то простые множители не меньшие 7 (потому что это число не делится на 5). В первом случае n_{k+2} — это степень двойки, на которую делится число

$$5n_{k+1} + 1 = 5(5n_k + 1) + 1 = 25 \cdot 2^m + 6,$$

т. е. $n_{k+2} = 2$, что не соответствует нашим ограничениям — слишком маленький показатель. Во втором случае $n_{k+1} \leqslant \frac{5n_k+1}{7} < n_k$.

Теперь рассмотрим случай $n_k = 3^\ell$, $n_{k+1} = 2^m$ (где $\ell \geqslant 2$, $m \geqslant 3$). Здесь аналогично или $n_{k+1} = 5n_k + 1$, или 2^m получается из числа $5n_k + 1$ сокращением на какие-то простые множители, не меньшие 7. Второй случай опять ведет к убыванию, что нам и требуется. В первом случае n_{k+2} — это степень тройки, на которую делится число

$$5n_{k+1} + 1 = 5(5n_k + 1) + 1 = 25 \cdot 3^\ell + 6,$$

т. е. $n_{k+2} = 3$, что не соответствует нашим ограничениям.

Замечание. Для $n_k = 3^\ell$ и $n_{k+1} = 2^m$ первый случай можно рассмотреть несколько иначе. А именно, тогда

$$5 \cdot 3^\ell = 2^m - 1.$$

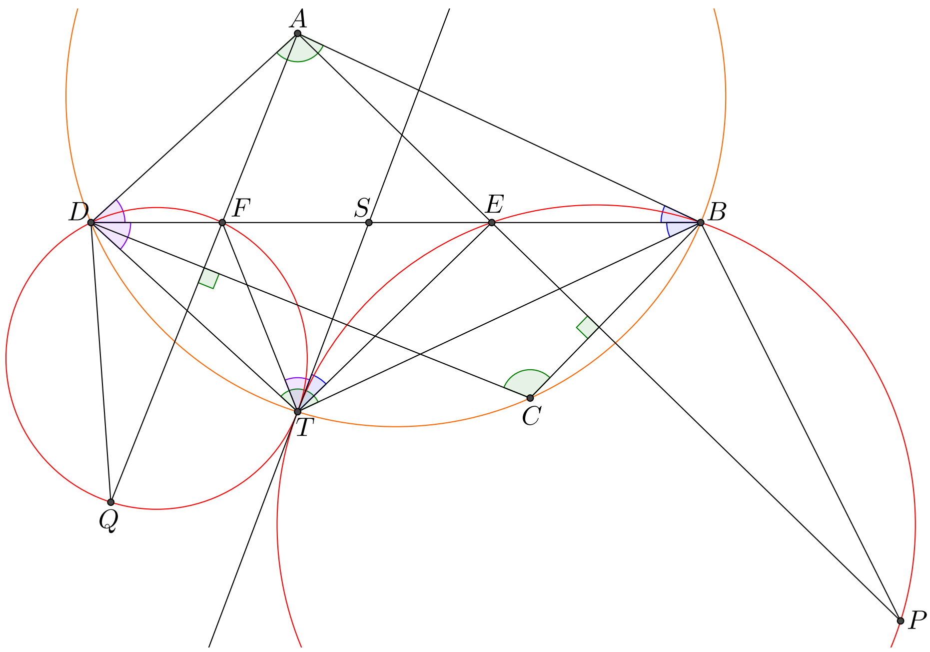
Правая часть делится на 3 только при четных m, пусть $m = 2s$, мы можем считать, что $s > 1$. Тогда разложим правую часть на множители

$$5 \cdot 3^\ell = 2^{2s} - 1 = (2^s + 1)(2^s - 1).$$

Поскольку нечетные множители в правой части взаимно просты (так как их разность равна 2) и больше 1, равенство было бы возможно только в случае когда одна из скобок равна 5, а другая равна 3^ℓ, но разность этих чисел равна 2 только при $\ell = 1$. Значит, первый случай при наших ограничениях невозможен.

5. Углы $\angle BAD$ и $\angle BCD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны. Точки P и Q симметричны точке A относительно прямых BC и CD соответственно. Прямые AP и AQ пересекают отрезок BD соответственно в точках E и F. Докажите, что описанные окружности треугольников BEP и DFQ касаются друг друга.

Решение.



Пусть точка T симметрична точке A относительно прямой BD (возможно она совпадает с точкой C). В силу симметрии $\angle BAP = \angle BPA$ и $\angle BTE = \angle BAE = \angle BAP$. Поэтому четырехугольник $PBET$ вписанный и, значит, точка T лежит на описанной окружности треугольника BEP. Аналогично проверяется, что точка T лежит на описанной окружности треугольника DFQ. Кроме того по симметрии $\angle BTD = \angle BAD = \angle BCD$. Следовательно, точки B, C, D и T лежат на одной окружности. Проведем касательную в точке T к описанной окружности треугольника BEP, пусть она пересекает прямую BD в точке S. Тогда

$$\begin{aligned}\angle FTS &= \angle ETF - \angle ETS = \angle ETF - \angle TBE = \angle EAF - \angle ABE = \\ &= \angle EAF + \angle BAD + \angle ADB - 180^\circ = \angle EAF + \angle BCD + \angle ADB - 180^\circ = \\ &= \angle EAF + \angle ADB - \angle CBD - \angle CDB = \\ &= \angle EAF + \angle ADB - (90^\circ - \angle AEF) - (90^\circ - \angle AFE) = \angle ADB = \angle BDT.\end{aligned}$$

Следовательно, TS — касательная к описанной окружности треугольника DFQ в точке T.

6. Даны четыре кучи камней, занумерованные числами от 1 до 4. Сначала в каждой куче лежит по 2024 камня. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый ход игрок выбирает натуральные числа $m < n \leqslant 4$, берет m камней из кучи с номером n и раскладывает все взятые камни, добавляя их по одному камню в каждую из куч с номерами от $n - m$ до $n - 1$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может победить независимо от игры соперника?

Ответ: Выигрывает Петя.

Решение. Будем следить за количеством камней во второй и четвертой кучах (числа a и b). Количество камней в остальных кучах не будет иметь значения. Назовем позицию (a, b) *выигрышной*, если игрок, делающий ход из этой позиции, может затем победить. В противном случае позицию назовем *проигрышной*. Покажем, что позиции, в которых a четно, а b дает остаток 1, 3 или 4 при делении на 5, а также позиции в которых a нечетно, а b не дает остаток 1 при делении на 5 выигрышные. Для этого надо проверить, что из любой выигрышной позиции есть ход в проигрышную позицию, а из любой проигрышной позиции либо вообще нет хода, либо ход есть только в выигрышные позиции. Отметим, что любой ход, в котором камни берутся из второй или третьей куч на единицу меняет число камней во второй куче и не меняет число камней в четвертой куче, поэтому из проигрышной позиции такой ход заведомо ведет в выигрышную.

выигрышные	
a	b
четно	$1, 3, 4 \pmod 5$
нечетно	$0, 2, 3, 4 \pmod 5$

проигрышные	
a	b
четно	$0, 2 \pmod 5$
нечетно	$1 \pmod 5$

Рассмотрим ходы, в которых камни берутся из четвертой кучи. Покажем, что любой такой ход переводит проигрышную позицию в выигрышную. Взятие одного камня из четвертой кучи не затрагивает вторую кучу и меняет остаток b от деления на пять, поэтому он заведомо переводит проигрышную позицию в выигрышную. Если из четвертой кучи взято два или три камня, то a увеличится на единицу и, в частности, сменит четность. Но если b давало остаток 1 при делении на 5, то уменьшение b на два или три приведет к остаткам 3 или 4, что соответствует выигрышной позиции. Если же b давало остаток 0 или 2 от деления на 5, то уменьшение b на два или три не может привести к остатку 1 (0 переходит в 2 или 3, а 2 переходит в 0 или 4), что также соответствует выигрышной позиции.

Наконец, покажем, что из выигрышной позиции всегда есть ход в проигрышную. Если a нечетно, то надо просто переложить один камень из второй кучи в первую. Если a — четно, то b дает остаток 1, 3 или 4 при делении на 5. Для остатков 1 и 3 можно переложить один камень из четвертой кучи в третью. А для остатка 4 — взять три камня и разложить их по первым трем кучам. Тогда a станет нечетным, а b будет давать остаток 1 от деления на 5, что соответствует проигрышной позиции.