

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Задания заключительного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 10–11 классов

Вариант 1. Условия

1. Кузнечик прыгает по числовой прямой. Каждый свой прыжок он может совершить в любом направлении. Он начинает в точке 0 прыжком единичной длины. Каждый следующий прыжок должен быть на пять больше предыдущего (т. е. первый прыжок длины 1, второй длины 6, третий длины 11 и т. д.). За какое наименьшее число прыжков кузнечик сможет оказаться в точке 2024?

2. Найдите угол α , если известно, что $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 3^\circ) - 2}{(1 - \operatorname{tg} 1^\circ)(1 - \operatorname{tg} 3^\circ) - 2}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC , меньший угол которого $\angle ABC = 40^\circ$. Внутри треугольника выбрана такая точка D , что $\angle BAC + \angle ADB = 180^\circ$ и $2\angle ACB + \angle DBA = 180^\circ$. Через точку C провели прямую, параллельную прямой AD , она пересекла прямую BD в точке E . Биссектрисы углов $\angle ABD$ и $\angle CAD$ пересекаются в точке F . Найдите угол $\angle DFE$.

4. Решите в целых числах уравнение $k^2 + m^2 = 5 \cdot 2023^n + 77$.

5. В стране 750 городов. Некоторые из них соединены беспосадочными двухсторонними авиалиниями. Известно, что среди любых 375 городов есть хотя бы 375 пар городов, соединенных друг с другом авиалинией. Какое наименьшее возможное количество авиалиний может быть в этой стране.