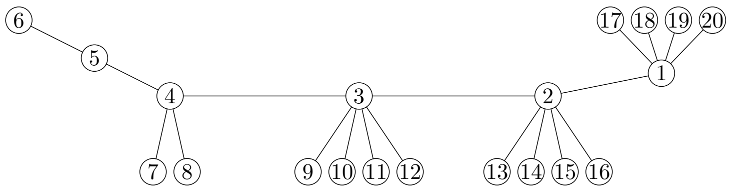
Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Задания заключительного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 6–7 классов

Вариант 1

1. Оля красит сороконожку, составленную из кружков и отрезков (см. рисунок). Два кружка, соединенных отрезком, считаются соседними. Сначала Оля красит в зеленый цвет N любых кружков. Далее происходит *докрашивание*: Оля выбирает любой зеленый кружок, у которого все соседние кружки, кроме одного, уже зеленые, — и этот оставшийся тоже красит в зеленый цвет. Потом она выбирает следующий кружок и т. д. При каком наименьшем N Оля сможет сделать все кружки зелеными?



а) Напишите, чему равно N, и укажите, какие кружки нужно закрасить вначале.

б) Докажите, что если вначале Оля закрасит меньшее количество кружков, то ей не удастся докрасить сороконожку.

2. На листе бумаги в треугольную клеточку нарисован шестиугольник. Каждая треугольная клетка лежит в полосах трех разных направлений. При пересечении поло́сы, содержащей клетку, со сторонами шестиугольника получаются отрезки, которые называются *проекциями* клетки на стороны шестиугольника. Для примера на рисунке изображен шестиугольник со стороной 3, закрашена одна клетка и изображены все ее проекции на стороны. Считаем, что сторона клетки равна 1.

Можно ли в шестиугольнике со стороной 100 так закрасить 9 клеток, не имеющих общих точек с его контуром, чтобы суммарная длина всех проекций этих клеток оказалась равна

а) 18 б) 53 в) 56 ? Если можно — объясните как, если нельзя — объясните, почему нельзя.

При подсчете суммы длин проекций каждый отрезок учитывается один раз, независимо от того, проекциями скольких клеток он является.

3. Есть 30 кроликов и 30 клеток, клетки пронумерованы числами от 1 до 30, а кролики — числами от 31 до 60. Кроликов рассаживают по клеткам (по одному кролику в клетку) так, чтобы номер каждого кролика был взаимно прост с номером его клетки.

а) Предложите способ такой рассадки.

б) Докажите, что количество способов так рассадить кроликов по клеткам больше 5000.

4. Возьмем произвольное натуральное число n_1. Вычислим значение $5n_1+1$ и уберем из его разложения на простые множители все множители, кроме двоек и троек. Полученное число назовем n_2. Например:

$$n_1 = 25 \quad \to \quad 5\cdot 25+1 = 126 = 2\cdot 3^2\cdot 7 \quad \to \quad n_2 = 18,$$
$$n_1 = 24 \quad \to \quad 5\cdot 24+1 = 121 = 11^2 \quad \to \quad n_2 = 1,$$
$$n_1 = 22 \quad \to \quad 5\cdot 22+1 = 111 = 3\cdot 37 \quad \to \quad n_2 = 3.$$

Потом вычислим значение $5n_2+1$ и уберем из этого числа все простые множители, кроме двоек и троек, полученное число назовем n_3 и т. д.

Докажите, что с какого бы натурального числа n_1 мы ни начали, через некоторое время в этой последовательности встретится число 1.

5. В некоторой толпе каждый человек имеет не более чем 111 знакомых. (Знакомство симметрично: если Маша знакома с Мишей, то и Миша знаком с Машей.) Докажите, что толпу можно разделить на две части A и B так, чтобы в A каждый человек имел не более 100 знакомых, а в B каждый человек имел не более 10 знакомых.