Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Задания заключительного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 8–9 классов

Вариант 1. Условия

1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = 2x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами, при любом вещественном x удовлетворяющий неравенству $20f(x) + 19 \geqslant 0$. Докажите, что $2f(x) + 1 \geqslant 0$ при любом вещественном x.

2. Есть 35 кроликов и 35 клеток, клетки пронумерованы числами от 1 до 35, а кролики — числами от 36 до 70. Кроликов рассаживают по клеткам (по одному кролику в клетку) так, чтобы номер каждого кролика был взаимно прост с номером его клетки. Докажите, что количество способов так рассадить кроликов по клеткам не меньше, чем 40 тысяч.

3. Для любого натурального числа n докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[1]{2!}} + \frac{1}{\sqrt[2]{4!}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6!}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8!}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \geqslant \frac{n}{n+1}.$$

(Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.)

4. Возьмем произвольное натуральное число n_1. Вычислим значение $5n_1+1$ и уберем из его разложения на простые множители все множители, кроме двоек и троек. Полученное число назовем n_2. Например,

$$\begin{aligned} n_1 = 25 \quad &\to \quad 5 \cdot 25 + 1 = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad \to \quad n_2 = 18, \\ n_1 = 24 \quad &\to \quad 5 \cdot 24 + 1 = 121 = 11^2 \quad \to \quad n_2 = 1, \\ n_1 = 22 \quad &\to \quad 5 \cdot 22 + 1 = 111 = 3 \cdot 37 \quad \to \quad n_2 = 3. \end{aligned}$$

Потом вычислим значение $5n_2 + 1$ и уберем из этого числа все простые множители, кроме двоек и троек, полученное число назовем n_3 и т. д.

Докажите, что с какого бы натурального числа n_1 мы ни начали, через некоторое время в этой последовательности встретится число 1.

5. Углы $\angle BAD$ и $\angle BCD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны. Точки P и Q симметричны точке A относительно прямых BC и CD соответственно. Прямые AP и AQ пересекают отрезок BD соответственно в точках E и F. Докажите, что описанные окружности треугольников BEP и DFQ касаются друг друга.

6. Даны четыре кучи камней, занумерованные числами от 1 до 4. Сначала в каждой куче лежит по 2024 камня. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый ход игрок выбирает натуральные числа $m < n \leqslant 4$, берет m камней из кучи с номером n и раскладывает все взятые камни, добавляя их по одному камню в каждую из куч с номерами от $n - m$ до $n - 1$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может победить независимо от игры соперника?