**Олимпиада школьников СПбГУ по математике**
**Примеры заданий отборочного этапа**
**2023/2024 учебный год**

## Задания для 10–11 классов

**1.** (10 баллов) *Хромая ладья бьёт ближайшие 15 клеток слева, справа, сверху и снизу (т.е. на бесконечной клетчатой плоскости она бы била $4 \times 15$ клеток, не считая той, на которой стоит). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга хромых ладей можно поставить на доску $193 \times 193$ так, чтобы они не били друг друга?*

**Ответ:** 2329.

**Решение.** Обозначим через $[i, j]$ — $i$-ю по горизонтали и $j$-ю по вертикали клеточку; $i$, $j$ от 1 до 193. Будем расставлять хромые ладьи «диагоналями»:

- на $[i, i]$, где $i$ от 1 до 193;
- на $[i + 16, i]$ и на $[i, i + 16]$, где $i$ от 1 до 177;
- на $[i + 32, i]$ и на $[i, i + 32]$, где $i$ от 1 до 161;
- и т. д.
- на $[i + 192, i]$ и на $[i, i + 192]$, где $i = 1$.

Легко заметить, что при такой расстановке хромые ладьи не бьют друг друга, т. к. расстояние между ними в любой горизонтали и в любой вертикали ровно 15 клеток. Вычислим количество расставленных хромых ладей:

$$193 + 2 \cdot (177 + 161 + \ldots + 17 + 1) = 193 + 2 \cdot \frac{12 \cdot (177 + 1)}{2} = 193 + 12 \cdot 178 = 2329.$$

Теперь покажем, что большее количество хромых ладей на заданном поле не расставить. Рассмотрим полосу поля размера $16 \times 193$ (16 строк во всю длину поля). В такой полосе нельзя расставить более 193 хромых ладей, т. к. иначе в какой-нибудь вертикали окажется более 1 хромой ладьи и они будут бить друг друга. Наше поле разбивается на 12 таких полос и остается полоска $1 \times 193$. В полоске можно расставить не более 13 хромых ладей (потому что на любой полосочке $1 \times 16$ — не более одной, а таких полосочек в полоске 12 штук и ещё 1 клеточка, на которую можно поставить одну хромую ладью). Таким образом, расставить более $193 \times 12 + 12 + 1 = 2329$ хромых ладей, чтобы они не били друг друга, на поле $193 \times 193$ нельзя.

**2.** (20 баллов) *Положительные действительные числа $x$, $y$ и $z$ таковы, что*

$$x^4 + 1 = 62x^2, \quad y^4 + 1 = 674y^2, \quad z^4 + 1 = 623z^2.$$

*Число $n$ таково, что*

$$x^2y^2z^2 + 1 = (xy + 1)(yz + 1)(zx + 1) - nxyz.$$

*Найдите $n$. Если необходимо, округлите ответ до ближайшего целого числа.*

**Ответ:** 59.

**Решение.** Раскроем скобки в правой части последнего выражения из условия и сгруппируем:

$$(xy+1)(yz+1)(zx+1)-nxyz=$$
$$=x^2y^2z^2+x^2yz+xy^2z+xyz^2+xy+yz+xz+1-nxyz=$$
$$=x^2y^2z^2+1+yz(x^2+1)+xz(y^2+1)+xy(z^2+1)-nxyz.$$

Учитывая левую часть последнего выражения из условия, получаем:

$$nxyz=yz(x^2+1)+xz(y^2+1)+xy(z^2+1).$$

Отсюда

$$n=\frac{x^2+1}{x}+\frac{y^2+1}{y}+\frac{z^2+1}{z}.$$

Теперь обратимся к условиям на положительные $x$, $y$, $z$ и заметим, что:

$$\frac{x^4+1}{x^2}=62\Leftrightarrow\frac{x^4+1}{x^2}+2-2=62\Leftrightarrow\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}-2=62\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-2=62\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2=64\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}=8;$$
$$\frac{y^4+1}{y^2}=674\Leftrightarrow\left(\frac{y^2+1}{y}\right)^2=676\Leftrightarrow\frac{y^2+1}{y}=26;$$
$$\frac{z^4+1}{z^2}=623\Leftrightarrow\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2=625\Leftrightarrow\frac{z^2+1}{z}=25.$$

Получаем, что $n=8+26+25=59$.

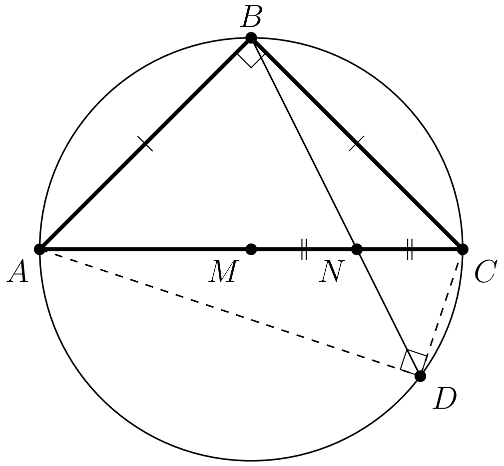
**3.** (20 баллов) *Внутри треугольника $ABC$ со сторонами $AB=\sqrt{5}$, $BC=4/3$ и $AC=$ $=\pi$ отмечена точка $M$. Оказалось, что сумма расстояний от точки $M$ до вершин треугольника $d=MA+MB+MC$ – натуральное число. Найдите произведение возможных значений $d$.*

**Ответ:** 120.

**Решение.** По неравенству треугольника $MA+MB>AB$, $MB+MC>BC$, $MA+$ $+MC>AC$, складывая эти неравенства находим, что $d$ больше величины полупериметра треугольника. С другой стороны, справедливы неравенства $AB+BC>MA+MC$, $BC+AC>MB+MA$, $AC+AB>MC+MB$, складывая эти неравенства получаем, что $d$ меньше периметра треугольника. В указанном диапазоне находятся натуральные числа 4, 5 и 6, следовательно, ответ равен 120.

**4.** (30 баллов) *Точка $M$ — середина гипотенузы $AC$ прямоугольного равнобедренного треугольника $ABC$, $N$ — середина отрезка $CM$. Прямая $BN$ пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ в точке $D$. Найдите площадь треугольника $ACD$, если $AB=10$.*

**Ответ:** 30.




**Решение.** Поскольку треугольник $ABC$ равнобедренный, то дуги $AB$ и $BC$ равны. Следовательно, равны опирающиеся на них углы $ADB$ и $BDC$. Таким образом, $DB$ — биссектриса угла $ADC$. Отсюда получаем, что

$$AD : DC = AN : NC = 3 : 1$$

(по условию $NC$ — четверть отрезка $AC$). Отметим, что треугольник $ADC$ — прямоугольный с гипотенузой $AC$. Обозначим $DC$ через $x$. Тогда

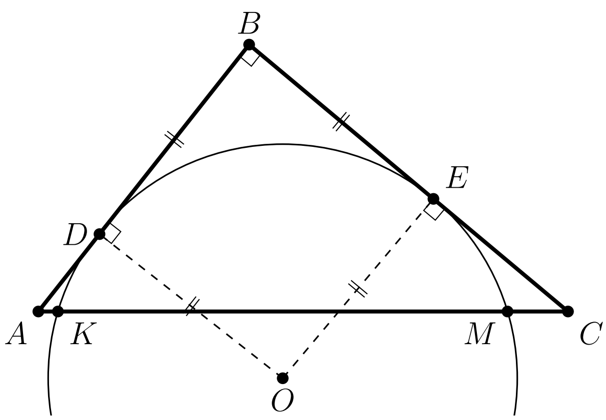
$$x^2 + (3x)^2 = 10^2 + 10^2.$$

Отсюда $x^2 = 20$ и площадь треугольника $ADC$ равна

$$\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30.$$

**5.** (30 баллов) *Окружность касается катетов прямоугольного треугольника и делит его гипотенузу на отрезки длины 1, 24 и 3 (при этом 24 — длина хорды окружности). Чему равна площадь треугольника?*

**Ответ:** 192.




**Решение.** Обозначим вершины тругольника, точки касания окружности и катетов и точки пересечения окружности и гипотенузы как указано на рисунке; $AK = 1$, $KM =$

$= 24$ и $MC = 3$. Пусть $r$ — радиус окружности, а $AB = a$, $BC = b$.

Поскольку $D$ и $E$ — точки касания, то $OD \perp AB$ и $OE \perp BC$. По условию $\angle ABC = 90^\circ$, поэтому в четырехугольнике $DBEO$ угол $DOE$ тоже прямой. То есть $DBEO$ — квадрат.

По свойству касательной к окружности и секущей, проведенных из одной точки, имеем:

$$EC^2 = CM \cdot CK \Leftrightarrow (b-r)^2 = 3 \cdot (3+24) \Leftrightarrow b - r = 9;$$
$$AD^2 = AK \cdot AM \Leftrightarrow (a-r)^2 = 1 \cdot (1+24) \Leftrightarrow a - r = 5.$$

Следовательно, $b - a = 4$ и теорему Пифагора для треугольника $ABC$ — $a^2 + b^2 = 28^2$ — можно переписать в виде квадратного уравнения относительно $a$:

$$a^2 + (a+4)^2 = 28^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 8 - \frac{28^2}{2} = 0.$$

Его положительным корнем является

$$a = \frac{-4 + \sqrt{16 - 32 + 2 \cdot 4^2 \cdot 7^2}}{2} = \frac{4\sqrt{1 - 2 + 2 \cdot 49} - 4}{2} = 2\sqrt{97} - 2.$$

Найдем площадь треугольника $ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{97} - 2) \cdot (2\sqrt{97} + 2) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 97 - 2^2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (97 - 1) = 2 \cdot 96 = 192.$$

**6.** (40 баллов) *На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2023. Раз в минуту к доске подбегает Жора. Он выбирает некоторое натуральное число $k$, но не обязательно написанное на доске. После этого каждое число на доске, не меньшее $k$, уменьшает на $k$. После нескольких операций на доске осталось ровно одно ненулевое число. Может ли оно быть больше 1?*

**Первое решение.** Покажем, что после каждой нетривиальной операции (то есть такой операции, во время которой уменьшалось хотя бы одно число) на доске будут выписаны все последовательные числа от 0 до некоторого $M$ (возможно, с повторениями). Это означает, что если какое-то число $x$ не выписано, то при этом также не может быть выписано и никакое число, большее $x$. Очевидно, перед самой первой операцией это утверждение верно. Пусть после некоторой операции утверждение также является верным, и сейчас Жора планирует проделать операцию с числом $k$. Если $k > M$, то в списке чисел на доске ничего не изменится. Если $k \leqslant M$, то числа от 0 до $k-1$ не изменятся, а числа от $k$ до $M$ превратятся в числа от 0 до $M-k$. Таким образом, после следующей операции на доске будут выписаны числа от 0 до $\max\{k-1, M-k\}$. Тогда если после операции на доске есть ровно одно ненулевое число, то это именно 1.

**Второе решение.** Посмотрим на два числа, которые изначально были последовательными $x$ и $x-1$. Докажем, что если большее из них не станет 0, то они всегда будут последовательными. Из этого будет следовать решение задачи, если применить его к тому числу, которое в итоге осталось на доске, и числу, которое изначально было на единицу меньше него. Итак, пусть после очередного хода $x$ и $x-1$ остаются последовательными числами $y$ и $y-1$. Если следующая операция будет производиться с $k > x$, то оба числа не изменятся. Если с $k = x$, то $x$ станет 0, а мы предположили, что это не так. Если же с $k \leqslant x-1$, то числа превратятся в последовательные числа $y-k$ и $y-1-k$.

**7.** (40 баллов) *В пространстве отмечены 100 точек. Некоторые пары отмеченных точек соединены отрезками. Если какие-то два отрезка пересекаются, то у них есть общий конец. Известно, что как ни покрась точки в красный и синий цвета, количество отрезков с разноцветными концами будет не более 500. Докажите, что отрезков проведено не более 1000.*

**Решение.** Возьмем раскраску с максимальным количеством отрезков с разноцветными концами. Рассмотрим какую-либо одну точку, пусть она будет красной, и все точки, соединенные с ней отрезком. Пусть красных точек среди них $k$, а синих — $s$. Это означает, что выбранная красная точка инцидентна $k$ одноцветным и $s$ разноцветным отрезкам.

Теперь поменяем цвет выбранной точки на синий. Количество разноцветных отрезков, инцидентных выбранной точке, уменьшилось на $s$ и увеличилось на $k$; количество разноцветных отрезков всего — не увеличилось, так как было максимальным. Следовательно, $k \leqslant s$. То есть количество одноцветных отрезков, чьим концом была выбранная точка, не больше, чем количество разноцветных отрезков с концом в выбранной точке. Поскольку точка выбиралась произвольно, то такое соотношение одноцветных и разноцветных отрезков верно для любой другой из ста точек. По условию, разноцветных отрезков не более 500, значит, одноцветных тоже не более 500. Поэтому и суммарно отрезков будет не более $500 + 500 = 1000$.

**8.** (40 баллов) *Пусть $k$-значное число $A = \overline{123...(k-1)k}$ записано в системе счисления с основанием $n < 10$, а $k$-значное число $B = \overline{(k-1)(k-2)...10}$ записано в десятичной системе счисления. Найти все пары чисел $A$ и $B$ такие, что $A = B$.*

**Ответ:** $(12)_8 = (10)_{10}$.

**Решение.** Прежде всего заметим, что $k > 1$, поскольку ни в какой системе счисления 0 не записывается как 1 (кроме того, $k < n$, исходя из смысла чисел $k$ и $n$). Распишем заданные числа:

$$A = 1 \cdot n^{k-1} + 2 \cdot n^{k-2} + 3 \cdot n^{k-3} + \ldots + (k-1) \cdot n^1 + k \cdot n^0,$$

$$B = (k-1) \cdot 10^{k-1} + (k-2) \cdot 10^{k-2} + \ldots + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0.$$

По условию $n < 10$ и, соответственно, $n^{k-1} < 10^{k-1}$. Поэтому если для каких-то значений $n$ и $k$ окажется, что

$$A - n^{k-1} < B - 10^{k-1}, \qquad (*)$$

то равенство $A = B$ в этом случае будет невозможным. Преобразуем:

$$A - n^{k-1} = 2n^{k-2} + 3n^{k-3} + \ldots + (k-1)n + k <$$

$$< k(n^{k-2} + n^{k-3} + \ldots + n + 1) = k\,\frac{n^{k-1} - 1}{n - 1} \leqslant n^{k-1} - 1,$$

где мы воспользовались формулой для суммы арифметической прогрессии и тем, что $k \leqslant n - 1$. Далее поступаем аналогично:

$$B - 10^{k-1} = (k-2)10^{k-1} + (k-2)10^{k-2} + \ldots + 2 \cdot 10^2 + 10.$$

Пусть $k > 2$, тогда

$$\begin{aligned} B - 10^{k-1} &\geqslant 10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10^2 + 10 = \\ &= 10(10^{k-2} + 10^{k-3} + \ldots + 10^1 + 1) = 10\,\frac{10^{k-1} - 1}{10 - 1} = \\ &= \frac{10}{9}\,(10^{k-1} - 1) > 10^{k-1} - 1. \end{aligned}$$

Это означает, что при $k > 2$ неравенство (*) выполняется. Запишем равенство $A = B$ для случая $k = 2$:

$$A = 1 \cdot n^1 + 2 \cdot n^0 = 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = B \Rightarrow n + 2 = 10 \Rightarrow n = 8.$$

Таким образом, равенство $A = B$ возможно только в одном случае, когда $A = (12)_8$, а $B = (10)_{10}$.