Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (15 баллов) *Федя и Вася выучили по 24 новых английских слова, изучая слова ежедневно. Федя половину слов учил по 2 слова в день, половину слов — по 6 слов в день. Вася половину времени учил по 2 слова в день, половину времени — по 6 слов в день. Сколько дней на изучение 24 слов потратил тот мальчик, который учил слова дольше?*

Ответ: 8.

Решение. Вычислим, сколько дней потратил на изучение слов каждый из мальчиков. Федя половину слов, т. е. 12, учил по 2 слова в день, т. е. потратил на это $12/2 = 6$ дней; а на изучение второй половины потратил $12/6 = 2$ дня. Т.е. всего $6 + 2 = 8$ дней. Обозначим через d — половину дней, в течение которых изучал слова Вася. Тогда $2d + 6d = 24$. Отсюда, $d = 3$, а, значит, всего на изучение слов Вася потратил $2 \cdot 3 = 6$ дней.

2. (15 баллов) *Найдите последнюю цифру числа* $2023 \cdot 2023 \cdot 2023 \cdot \ldots \cdot 2023$, *где число 2023 умножается на себя* 2024 *раза.*

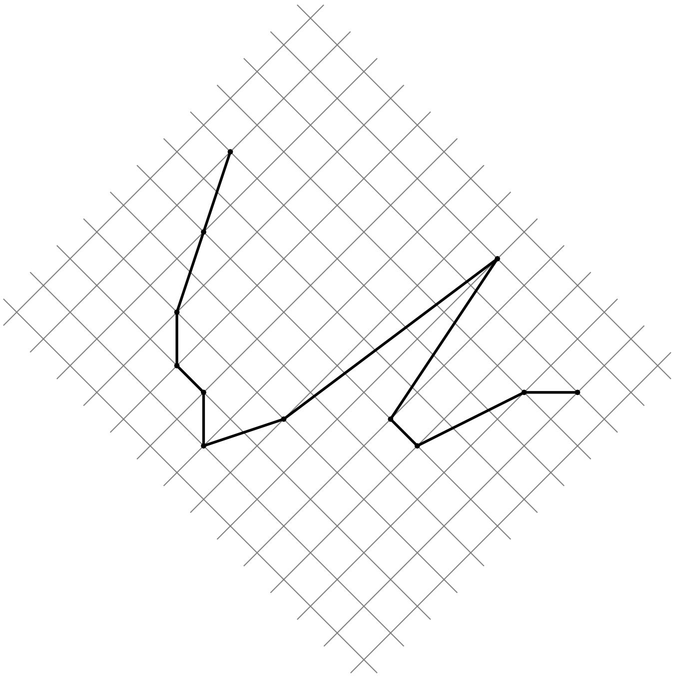
Ответ: 1.

Решение. Последняя цифра числа $(2020 + 3)^n$ определяется последней цифрой числа 3^n. Последняя цифра степени тройки циклична: $3 - 9 - 7 - 1 - 3 \ldots$. Поскольку $2024 = 4 \cdot 506$, то последняя цифра равна 1.

3. (35 баллов) *Юннат Вася наблюдает за птицами и каждую неделю подсчитывает количество разных видов птиц, прилетавших на школьный двор. Результаты подсчетов Вася отмечает слева направо на графике на клетчатом листе (одна клеточка — одна неделя наблюдений/один вид птиц). Через некоторое время после окончания наблюдений Вася стал готовить презентацию своего исследования и обнаружил, что на графике зависимости количества разных видов птиц от недели наблюдения не были указаны оси координат и график выглядит как на рисунке. Вася помнит, что в третью неделю наблюдений количество разных видов птиц было ровно в 2 раза больше, чем во вторую неделю наблюдений. Определите номер недели наблюдения, во время которой на школьный двор прилетало наибольшее количество разных видов птиц.*

Ответ: 7.

Решение. Поскольку измерения на графике отмечались слева направо, то начало координат может быть а) либо в левом углу рисунка (и тогда ось Ox — «номер недели наблюдения» — будет идти в нижний угол рисунка, а ось Oy — «количество разных



видов птиц» — будет идти в верхний угол рисунка), б) либо в правом углу рисунка (и тогда ось Ox — «номер недели наблюдения» — будет идти в верхний угол рисунка, а ось Oy — «количество разных видов птиц» — будет идти в нижний угол рисунка).

Проверим, на основании той информации, что помнит Вася, возможны ли эти варианты. Случай а) невозможен, т. к. значения измерений на протяжении первых четырех недель наблюдения уменьшаются.

Случай б) возможен, т. к. значение в точке, соответствующей третьей неделе наблюдения, больше значения в точке, соответствующей второй неделе наблюдения. Разница в значениях составляет 3 единицы. Пусть x — количество видов птиц во вторую неделю наблюдений, а y — количество видов птиц в третью неделю наблюдений. Тогда по условию $y = 2x$, а по графику $y - x = 3$. Отсюда получаем, что $x = 3$. Этот вариант возможен, т. к. минимальное измеренное количество видов птиц, которое отмечалось в пятую неделю наблюдений, в таком случае будет равно 1, т. е. не будет отрицательным. При этом максимальное количество разных видов птиц было в 7-ю неделю наблюдений.

4. (35 баллов) *На доске было записано трехзначное число. Хулиган Петя на перемене стер у числа две цифры, так что на доске от этого числа осталась только цифра 3. Отличник Вася пытается восстановить исходное число, зная, что оно при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 — остаток 4. Сколько подходящих чисел найдет Вася, если ему неизвестно, из какого разряда осталась нестертая Петей цифра?*

Ответ: 12.

Решение. Если число дает остаток 4 при делении на 5, то последней цифрой такого числа может быть только 4 или 9. Значит, оставшаяся цифра 3 не могла находиться в разряде единиц. Теперь обсудим остаток 2 при делении на 3. Число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3, значит, сумма цифр исходного числа тоже дает остаток 2 при делении на 3.

Если последняя цифра искомого числа — это 4, то в дополнение к 4 и 3 мы можем взять цифры 1, еще одну 4 или 7. Всего получаем, что подходящих чисел такого вида 6 штук. (Два варианта для выбора разряда для 3 и три варианта оставшейся цифры.)

Если последняя цифра числа — это 9, то в дополнение к 3 и 9 мы можем взять цифры 2, 5, 8. Здесь у нас тоже есть 6 вариантов.

5. (50 баллов) *Юный хамелеон тренируется в смене окрасок: по понедельникам он меняет цвет 1 раз, по вторникам — 7 раз, по средам — 2 раза, по четвергам — 6 раз, по пятницам — 3 раза, по субботам — 5 раз, по воскресеньям — 4 раза. Какое максимальное суммарное количество раз юный хамелеон может поменять окраску в период с 25 числа одного месяца по 10 число включительно следующего месяца?*

Ответ: 71.

Решение. Поскольку любой месяц может начинаться с любого дня недели, то можно отметить следующее:
а) Максимальное суммарное количество изменений цвета у хамелеона будет тогда, когда подсчет ведется с 25-го числа месяца, содержащего 31 день, т. е. в течение

$$31 - (25 - 1) + 10 = 17 \text{ дней.}$$

б) Таким образом, изменение цвета происходит в течение двух полных недель и еще трех дней. Очевидно, полная неделя всегда дает одно и то же количество изменений цвета, независимо от того, в какой именно день она началась (все семь дней недели будут задействованы). Поэтому, нам нужно найти наибольшее возможное количество изменений цвета за какие-нибудь последовательные три дня. Последовательность значений изменений цвета, по условию задачи, такая: $1 - 7 - 2 - 6 - 3 - 5 - 4$. Подпоследовательности из трех последовательных элементов: $1 - 7 - 2$, $7 - 2 - 6$, $2 - 6 - 3$, $6 - 3 - 5$, $3 - 5 - 4$, $5 - 4 - 1$, $4 - 1 - 7$ (их семь, т. к. суммирование ведется в течение нескольких последовательных недель, поэтому возможны тройки дней «суббота–воскресенье–понедельник» и «воскресенье–понедельник–вторник»). Легко видеть, что подпоследовательность с максимальной суммой элементов — это $7 - 2 - 6$, когда сумма элементов равна 15. Таким образом, итоговая максимальная сумма числа изменений цвета юного хамелеонаь равна

$$2 \cdot (1 + 7 + 2 + 6 + 3 + 5 + 4) + 15 = 71.$$

6. (50 баллов) *Прямоугольник 10×15 клеточек изначально покрашен в белый цвет. Каждая клеточка прямоугольника имеет свой номер (от 1 до 150). К клеточкам могут применяться правила раскрашивания:*
правило А) если номер клеточки дает остаток 1 при делении на 3, то клеточка раскрашивается в красный цвет;

правило Б) если номер клеточки дает остаток 2 при делении на 3, то клеточка раскрашивается в желтый цвет;
правило В) если номер клеточки дает остаток 2 при делении на 4, то клеточка раскрашивается в зеленый цвет;
правило Г) если номер клеточки дает остаток 3 при делении на 4, то клеточка раскрашивается в фиолетовый цвет.
Какое максимальное суммарное количество белых и красных клеточек может получиться, если применить все имеющиеся правила раскраски хотя бы по одному разу??

Ответ: 74.

Решение. Для удобства использования запишем правила в едином виде, как остатки при делении на НОК(3, 4)=12:

правило А (красный) — если номер клеточки дает остатки 1, 4, 7 и 10 при делении на 12;

правило Б (желтый) — если номер клеточки дает остатки 2, 5, 8 и 11 при делении на 12;

правило В (зеленый) — если номер клеточки дает остатки 2, 6 и 10 при делении на 12;

правило Г (фиолетовый) — если номер клеточки дает остатки 3, 7 и 11 при делении на 12.

Заметим следующее: а) повторное применение правил не дает новых цветных клеточек, поэтому количество белых будет неизменным при любом порядке применения всех правил (если уж клеточка была покрашена, то она и останется цветной, хотя, возможно, и окажется перекрашенной в другой цвет). Останутся непокрашенными (т. е. белыми) клеточки, чьи номера дают остаток 0 или 9 при делении на 12. В промежутке от 1 до 150 таких клеточек будет всего $2 \cdot 12 = 24$;

б) правила А и Б всегда красят разные клеточки;

в) правила В и Г всегда красят разные клеточки;

г) поскольку правила В и Г перекрашивают красные клеточки в другой цвет, то правило А должно применяться после этих правил, если мы хотим получить больше красных клеточек (но А может применяться как до правила Б, так и после него — см. п. б)). Таким образом, для получения максимального количества красных клеточек нам подходит, например, такая последовательность применения правил раскраски: В-Г-Б-А (В-Г-А-Б дала бы такой же результат, см. п. а)). Таким образом, у нас нет необходимости вычислять, сколько клеточек будут закрашены в желтый/зеленый/фиолетовый цвета. Достаточно просто вычислить количество красных (из-за отсутствия перекрашивания они красными и останутся).

Нетрудно подсчитать количество чисел, подпадающих под правило А, среди чисел от 1 до 150: $4 \cdot 12 + 2 = 50$ (поскольку $150 = 12 \cdot 12 + 6$ — т. е. это 12 полных «циклов» и половинка). Отсюда получаем ответ: максимальное количество белых + красных клеточек равняется $24 + 50 = 74$.