Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 8–9 классов

1. (10 баллов) *Саша на день рождения пригласил 50 друзей и приготовил для них два вида лимонада: «Байкал» и «Тархун». В ходе дня рождения хоть какой-то лимонад пили 40 друзей Саши, причём 27 друзей не пили «Тархун». Сколько друзей Саши пили только «Байкал»?*

а) 17

б) 27

в) 40

г) 50

д) другой ответ

Ответ: а)

Решение. Все друзья Саши делятся на 4 непересекающихся множества: которые пили только «Тархун»; которые пили только «Байкал»; которые пили и «Тархун», и «Байкал»; которые ничего не пили. Те 27 друзей, кто не пил «Тархун» — это те, кто вообще ничего не пил (их $50 - 40 = 10$), и те, кто пил только «Байкал». Отсюда получаем, что пивших только «Байкал»: $27 - 10 = 17$.

2. (10 баллов) *У Жоры имеется 6 карточек, на которых написаны цифры от 1 до 6 (на каждой карточке ровно одна цифра, каждая цифра написана ровно на одной карточке), лежащие в стопке в некотором порядке. Жора выкладывает из карточек два трёхзначных числа: он берёт карточки из стопки сверху вниз и кладёт их в каждом числе слева направо. В результате у него образовались два числа: 426 и 135. Жоре эти числа не понравилось, он собрал карточки обратно в стопку в изначальном порядке и повторил свой алгоритм. На этот раз у него вышли числа 416 и 352. В каком порядке карточки лежали в стопке?*

a) 4 1 3 5 2 6;

b) 5 6 3 1 4 2;

c) 1 2 3 4 5 6;

d) 4 1 6 3 5 2;

e) другой ответ.

Ответ: a)

Решение. То, что карточки берутся сверху вниз и выкладываются слева направо означает, что карточка с более левой цифрой в числе в стопке должна была находиться выше, чем карточка с более правой цифрой. Для чисел первой попытки имеем: «4» выше «2», которая выше «6»; «1» выше «3», которая выше «5». Будем обозначать это как $4 \to 2 \to 6$ и $1 \to 3 \to 5$. Карточки одного числа могут идти в стопке как подряд, так и чередуясь с карточками другого числа. Поэтому, если бы была только одна попытка составления чисел, то вариантов расположения карточек в стопке могло бы быть много.

Однако, вторая попытка составления чисел накладывает другие ограничения на взаимное расположение карточек в стопке: $4 \to 1 \to 6$ и $3 \to 5 \to 2$.

На основании полученных ограничений проанализируем расположение карточек в стопке. Верхней карточкой может быть только «4», т. к. не может быть никакая другая, поскольку, например, выше «1» должна быть «4», выше «2» — «4» или «5», и т. д. Нижней карточкой может быть только «6», т. к. ниже и «5», и «2» (последних цифр составленных чисел) должны быть другие карточки. Теперь обратим внимание на вторые числа в каждой попытке: 135 и 352. Они дают следующее ограничение на расположение карточек: $1 \to 3 \to 5 \to 2$. Таким образом, у нас есть единственный вариант расположения карточек в стопке, а именно ответ а).

3. (20 баллов) *Найдите наименьшее натуральное число n, для которого существует дробь со знаменателем n, лежащая между числами $\frac{791}{79}$ и $\frac{1016}{101}$.*

Ответ: 17.

Решение. Заметим, что $\frac{791}{79}$ — это $10\,\frac{1}{79}$, а $\frac{1016}{101}$ — это $10\,\frac{6}{101}$. Таким образом, задача сводится к поиску наименьшего натурального n, для которого существует дробь $\frac{p}{n} = 10\,\frac{q}{n}$ такая, что

$$\frac{1}{79} < \frac{q}{n} < \frac{6}{101}.$$

Здесь q — натуральное число, $q < n$.

Приведя дроби, записанные в этом условии, к общему знаменателю, получим следующее ограничение:

$$101 \cdot n < 79 \cdot 101 \cdot q < 6 \cdot 79 \cdot n$$

или, что то же самое,

$$\frac{101}{6} \cdot q < n < 79 \cdot q.$$

При разных значениях q это будут разные промежутки. Например, при $q = 1$, это будет промежуток $\left(\frac{101}{6}, 79\right)$, при $q = 2$ — промежуток $\left(\frac{202}{6}, 158\right)$ и т. д. Нам нужно найти наименьшее n, поэтому попробуем найти его в «наименьшем» промежутке, т. е. при $q = 1$. Преобразуем: $\frac{101}{6} = 16\,\frac{5}{6}$. Видим, что наименьшее натуральное число, лежащее между $16\,\frac{5}{6}$ и 79 — это 17.

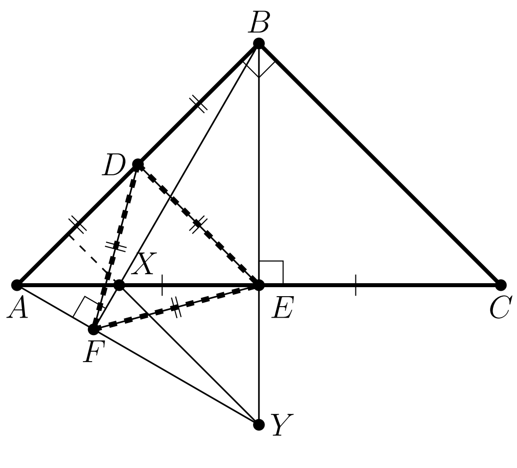
4. (20 баллов) *На доске было записано четырехзначное число. Хулиган Петя на перемене стер у числа две соседние цифры, так что на доске осталось число 34. Отличник Вася пытается восстановить число, зная, что оно при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 — остаток 4. Сколько подходящих чисел найдет Вася, если ему неизвестно, является ли нестертая Петей часть числа началом его записи или концом?*

Ответ: 37.

Решение. Утверждение «при делении на 5 дает остаток 4» означает, что последней цифрой может быть 4 или 9, значит, 34 может быть концом записи искомого числа. Рассмотрим сначала именно этот случай. Вторую (слева) цифру мы можем выбрать 10 способами, оставшуюся цифру уже нужно выбирать из условия «при делении на 3 дает остаток 2». Ноль не может быть первой цифрой числа, оставшиеся 9 цифр разбиваются в группы по три, дающие одинаковый остаток при делении на 3. В этом случае мы получаем 30 вариантов интересующего нас числа.

Теперь рассмотрим случай, когда 34 — это начало четырехзначного числа. Последнюю цифру мы можем выбрать 2 способами. Предпоследнюю цифру выбираем из условия делимости на 3 с нужным остатком. Если последняя цифра — это 4, то предпоследней может быть 0, 3, 6 или 9, а если последняя цифра — это 9, то предпоследней может быть 1, 4 или 7 . Получаем еще 4+3 варианта.

5. (30 баллов) *Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC (угол B равен 90 градусов). Точки D и E — середины сторон AB и AC. Точка F, лежащая в той же полуплоскости относительно прямой DE, что и точка A, такова, что треугольник DEF — равносторонний. Прямые AC и BF пересекаются в точке X, прямые AF и BE — в точке Y. Докажите, что XY и AB перпендикулярны.*



Решение. X — ортоцентр треугольника ABY. Покажем это.

а) Поскольку DE средняя линия, параллельная катету равнобедренного прямоугольного треугольника, а треугольник DEF равносторонний, то

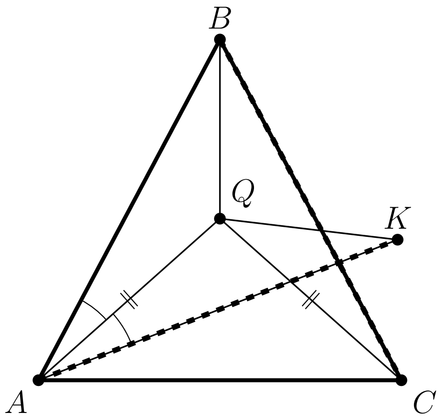
$$DE = AD = DB = DF = FE.$$

Отсюда, треугольник AFB — прямоугольный. Т. е. проходящая через X прямая BF перпендикулярна проходящей через Y прямой AF.

б) Проходящая через Y прямая BE перпендикулярна проходящей через X прямой AC как медиана прямого угла в равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC. Т. е.

BF и AE — высоты в треугольнике ABY, следовательно, YX тоже будет высотой и будет перпендикулярна AB.

6. (30 баллов) *В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен $64°$. Внутри угла BAC, но вне треугольника ABC отмечена точка K такая, что $AK = BC$. Внутри треугольника ABC отмечена точка Q такая, что $AQ = QC$ и AQ — биссектриса угла BAK. Найдите величину угла $\angle AKQ$.*



Ответ: $26°$.

Решение. Рассмотрим треугольники ABQ и AQK. Сторона AQ у них общая, $\angle BAQ = \angle QAK$, т. к. AQ — биссектриса угла BAK. Также из построения точки K и равнобедренности треугольника ABC с основанием AC верно равенство сторон $AK = BC = BA$. Следовательно, данные треугольники равны и, соответственно, равны углы $\angle AKQ = \angle ABQ$.

Теперь заметим, что так как $AQ = QC$, то точка Q лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC, который является основанием равнобедренного треугольника ABC. Поэтому точка Q лежит и на биссектрисе угла ABC. Отсюда получаем, что

$$\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(180° - 2 \cdot 64°) = 26° = \angle AKQ.$$

7. (40 баллов) *На доске были записаны два примера на сложение чисел, но хулиган Вася стер в каждом примере одно из слагаемых, а также получившийся результат:*

$$\begin{array}{rcccc} 99 & + & \ldots & = & \ldots \\ 203 & + & \ldots & = & \ldots \end{array}$$

Отличник Петя помнит, что стертое слагаемое было одинаковым для обоих примеров, а результатами являлись квадраты различных натуральных чисел. Найдите все возможные варианты значений стертого слагаемого, которые сможет предложить Петя?

Ответ: Петя найдет два возможных слагаемых (22 и 526).

Решение. Пусть x — стертое слагаемое, а n^2 и m^2 — правые части равенств. Составим разность: $104 = (m-n)(m+n)$. Заметим, что $m+n$ и $m-n$ имеют одинаковую четность, а значит, являются четными числами. Поскольку $104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$, то имеем два варианта:

$$\begin{cases} m + n = 26, \\ m - n = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} m + n = 52, \\ m - n = 2, \end{cases}$$

Решая системы, находим $m = 15,\ n = 11,\ x = 22$ и $m = 27,\ n = 25,\ x = 526$.

8. (40 баллов) *Петя и Вася играют на доске* 10×10*, исходно покрашенной в белый цвет. Они по очереди перекрашивают по одной клетке доски: Петя — в красный цвет, Вася — в синий цвет. Начинает Петя; игра заканчивается, когда все клетки доски будут покрашены. Может ли Петя красить клетки так, чтобы вне зависимости от ходов Васи в конце нашлись две соседние клетки доски, покрашенные в синий цвет? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*

Ответ: Да, может.

Решение. Доска 10×10 состоит из 100 клеток, поэтому каждый мальчик сделает по 50 ходов и последний ход будет за Васей. Чтобы нашлись две соседние клетки синего цвета, Пете нужно добиться, чтобы последним ходом Вася закрашивал клеточку рядом с синей. Чтобы такая клеточка нашлась, Пете нужно её «зафиксировать» и никогда в нее не ходить. Например, он может выбрать клеточку рядом с первой закрашенной Васей (такая точно есть, т. к. после первого хода каждого из игроков закрашены всего 2 клеточки, то есть у каждой из них закрашено не более одной соседней, а при этом у любой клетки поля имеется не менее двух соседних).