

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Заключительный этап. 2024/2025 учебный год

Примеры заданий для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

1. На столе в ряд стоит 40 чашек, занумерованных слева направо числами от 1 до 40. В каждой чашке лежит не более 10 вишен, а количество вишен в любых соседних чашках отличается ровно на один. В чашках с номерами 1, 4, 7, 10, . . . , 40 вместе 125 вишен. Какое наибольшее количество вишен может быть во всех чашках?

Ответ: 372

Решение. Заметим, что для каждой пары соседних чашек в одной четное число вишен, в а другой — нечетное. Тогда в них вместе нечетное, не превосходящее 20, число вишен. Значит, в каждой паре соседних чашек не более 19 вишен. Тогда в каждой из пар 2–3, 5–6, 8–9, . . . , 38–39 не более 19 вишен, а во всех этих парах вместе не более $19 \cdot 13 = 247$ вишен. Тогда всего в чашках не более $247 + 125 = 372$ вишен.

Приведем пример размещения 372 ягод. В чашки с нечетными номерами положим по 9 вишен, а в чашки с четными номерами по 10 вишен. Всего получится 380 вишен. Далее съедем по две вишни из чашек с номерами 4, 10, 16 и 22. Останется 372 вишни.

2. Вещественные числа a , b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc - ca$.

Ответ: 3

Решение. При $a = c = 1$ и $b = 2$ имеем $ab + bc - ca = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 3$. Докажем, что $ab + bc - ca \leq 3$. Для этого покажем, что $2ab + 2bc - 2ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ или, что то же самое, $2b(a + c) \leq b^2 + (a + c)^2$. Но это следствие неравенства о средних для двух чисел: $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

3. Три простые числа p , q и r больше трех и удовлетворяют условию $2p + 5q = r$. Для какого наибольшего n число $p + q + r$ всегда будет делиться на n ?

Ответ: 9

Решение. Покажем, что $p + q + r$ всегда делится на 9. Действительно, по условию $2p + 5q = r$, поэтому $p + q + r = 3p + 6q = 3(p + 2q)$. Заметим, что $2p + 5q = 2(p + q) + 3q$, поэтому если p и q дают остатки 1 и 2 от деления на три, то $2p + 5q$ делится на три и больше трех, поэтому не может быть простым числом. Значит, p и q дают одинаковые остатки от деления на три. Тогда $p + 2q$ делится на три, а, значит, $p + q + r$ делится на 9.

Если $p = 11$ и $q = 5$, то $r = 2p + 5q = 47$ простое число и $p + q + r = 63$. Если $p = 17$ и $q = 5$, то $r = 2p + 5q = 59$ простое число и $p + q + r = 81$. Поэтому для чисел из условия задачи $p + q + r$ гарантированно может делиться только на $\text{НОД}(63, 81) = 9$.

4. Пусть Ω и Γ — две такие окружности с центрами O и P соответственно, что окружность Γ проходит через точку O . На окружности Γ вне окружности Ω выбрана точка M . Касательные к Ω , проходящие через M , касаются Ω в точках A и B и вторично пересекают Γ в точках C и D . Отрезки AB и CD пересекаются в точке E . Докажите, что прямые PE и CD перпендикулярны.

Решение. Для начала заметим, что поскольку MA и MB — касательные к окружности Ω , а точка O — центр Ω , то $\angle AMO = \angle BMO$. Значит, $\angle CMO = \angle DMO$, т. е. дуги OC и OD окружности Γ равны, т. е. точки C и D симметричны относительно прямой OP .

Пусть E' — точка пересечения прямых CD и OP . В силу симметрии C и D , мы знаем, что $PE' \perp CD$. Докажем, что $E' = E$. Для этого достаточно проверить, что E' лежит на прямой AB .

Пример легко построить из оценки: возьмём ученика без карточек, 100 учеников с одной карточкой, а также $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4\,950$ учеников со всеми возможными $\frac{100 \cdot 99}{2}$ парами карточек. Тогда каждое конкретное число встречается ровно у $1 + 99 = 100$ учеников.