

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Заключительный этап. 2024/2025 учебный год

Примеры заданий для 6-7 классов

(Правильное и полное решение задач 1, 2, 3 и 5, а также пункта 4в в задаче 4 оценивается в 20 баллов; правильное и полное решение каждого из пунктов 4а и 4б в задаче 4 оценивается в 10 баллов)

1. По кругу в некотором порядке выписаны числа от 1 до 25. Разрешается взять несколько чисел, стоящих подряд, (но не все) и заменить их на их произведение. Можно ли при помощи таких операций сделать все числа на окружности равными? Если да — то объясните, как это сделать, если нет — объясните, для какой начальной расстановки и почему это невозможно.

Ответ: это всегда возможно.

Сначала перемножим все числа, кроме 1. Мы получим расстановку чисел, среди которых одна единица, а остальные числа равны одному и тому же числу x . Теперь перемножим единицу и 12 следующих чисел — эти числа станут все равны x^{12} . Наконец, перемножим оставшиеся 12 чисел x .

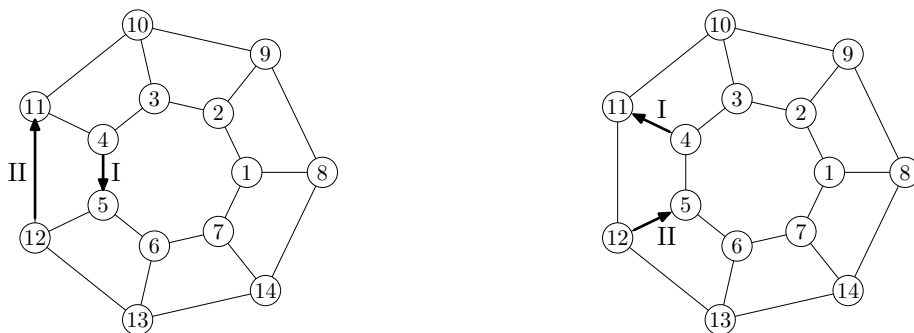
2. Бульдозеристы Аз и Бук играют на карте (см. рисунок, кружки — это деревни, а линии — дороги). Сначала Аз ставит свой бульдозер в любую деревню по своему выбору и проезжает по любой дороге, выходящей из этой деревни, в соседнюю деревню. Дорога при этом разрушается. Потом Бук ставит свой бульдозер в любую деревню (в том числе, можно выбирать деревню, где был или находится Аз), проезжает по любой неразрушенной дороге, выходящей из этой деревни, в соседнюю деревню и оставляет там свой бульдозер (там может уже стоять бульдозер Аза).

Далее ходы выполняются по очереди. Каждым ходом игрок должен переместить свой бульдозер по еще не разрушенной дороге в соседнюю деревню (там может стоять бульдозер другого игрока), при этом дорога разрушается. Если игрок не может сделать ход из-за того, что все дороги, выходящие из деревни, разрушены, он считается проигравшим.

Кто из игроков — Аз или Бук — выигрывает при правильной игре вне зависимости от действий другого игрока? Приведите подробное объяснение его стратегии.

Ответ: выигрывает второй игрок — Бук.

Приведем выигрышную стратегию Бука. Поскольку картинка симметрична, можно считать, что имеется всего два варианта первого хода Аза: а) по ребру, соединяющему внешний и внутренний круги; б) по ребру одного из кругов. В силу симметрии также неважно, в каком направлении Аз двигался по ребру.



На рисунке приведён ответный ход Бука в каждом из этих случаев. Далее Бук применяет симметричную стратегию: если Аз ходит по ребру внутреннего круга, то Бук идёт по ребру внешнего в противоположном направлении, а если Аз идёт по ребру внешнего, то Бук идёт по ребру внутреннего (тоже в противоположном направлении). Если Аз переходит с одного круга на другой, то Бук переходит с другого на первый. В результате на любой ход Аза у Бука всегда есть ответный ход, кроме случая, когда Аз доберётся до ребра 1–8 и пойдёт по нему.

Этот случай, однако, сразу приводит к проигрышу Аза. Действительно, если Аз пошел по ребру 1–8, для определенности Аз находился в вершине 1 и пошел в вершину 8, то в силу симметрии Бук в момент начала этого хода находился в вершине 8. Очевидно, ранее игроки не могли посещать вершины 1 и 8 (слишком мало дорог). Значит, Бук пришел в вершину 8, отвечая на предыдущий ход соперника, разрушив дорогу. Аз, проходя из 1 в 8, разрушает вторую дорогу. Таким образом, Бук может уйти из вершины 8 по третьей дороге, и Аз проиграл (ему некуда идти).

Таким образом, Бук выигрывает независимо от того, произойдет разобранный случай или нет.

3. Существуют ли три натуральных числа x, y, z , удовлетворяющих уравнению

$$17^x + 4 \cdot 17^y = z^2 ?$$

Если да — приведите пример такой тройки чисел, если нет — объясните, почему решений нет.

Решение. Ответ: таких чисел не существует.

Заметим, что левая часть делится на 17. Значит, z^2 делится на 17, а так как 17 — простое число, то и z делится на 17. Пусть $z = 17^k z_1$, где z_1 не делится на 17. Подставим в уравнение:

$$17^x + 4 \cdot 17^y - 17^{2k} z_1^2 = 0.$$

Сократим это равенство на максимально возможную степень числа 17. В результате число 17 либо полностью сократится, либо останется только в одном из слагаемых (остаться в двух слагаемых оно не может, поскольку в этом случае левая часть не будет делиться на 17 и поэтому не сможет быть равна 0). Таким образом мы придем к одному из уравнений

$$\begin{aligned} 1 + 4 - z_1^2 &= 0, \\ 1 + 4 - 17^{k_1} z_1^2 &= 0, \\ 17^{x_1} + 4 - z_1^2 &= 0, \\ 1 + 4 \cdot 17^{y_1} - z_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ясно, что первые два равенства невозможны. Третье уравнение не имеет решений, поскольку приводится к виду

$$(z_1 - 2)(z_1 + 2) = 17^{x_1}.$$

Оба выражения в скобках должны быть степенями числа 17, что, очевидно, невозможно. Наконец, четвертое уравнение также перепишем в виде

$$(z_1 - 1)(z_1 + 1) = 4 \cdot 17^{y_1}.$$

Случай $y_1 = 0$ относится к самому первому из разбиравшихся уравнений. При $y_1 > 0$ обе скобки не могут делиться на 17, поскольку их разность равна 2, значит, меньшая скобка равна 1, 2 или 4, откуда находим, что $z_1 = 2, 3$ или 5 и равенство невозможно.

4. Вдоль дороги в некотором порядке стоят 32 столба, высотой 1, 2, ..., 32 м. Если среди столбов, расположенных между какими-то двумя несоседними столбами A и B , хотя бы один столб выше, чем A или B (в том числе, если он выше, чем оба столба A и B), то электрик соединяет столбы A и B кабелем. Известно, что электрик, пользуясь этим правилом, проложил все возможные кабели. Например, если бы стояло только 6 столбов в порядке высот 5, 3, 6, 2, 1, 4, то электрик проложил бы 6 кабелей:

$$(5, 2), (5, 1), (5, 4), (3, 2), (3, 1), (3, 4).$$

- а) Приведите пример расположения столбов, в котором всего будет протянут 461 кабель.
- б) Какое наибольшее число кабелей может быть?
- в) Докажите, что электрик протянул не меньше 435 кабелей.

Решение.

- б) Ответ: 465 кабелей.

Всего имеется $\frac{32 \cdot 31}{2} = 496$ пар столбов, при этом среди них 31 пара — это соседние столбы, которые никогда не соединяются кабелем. Остается $496 - 31 = 465$ пар столбов. Все они могут быть соединены, если столбы просто стоят по возрастанию высот.

а) Будем считать высоту столба его номером. С учетом решения пункта б) нам нужно расставить столбы так, чтобы все несоседние столбы были соединены, за исключением четырех пар столбов. Заметим, что в условии задачи приведен пример 6 столбов, в котором имеется ровно 4 пары несоседних не соединенных столбов — это пары

$$(5, 6), (6, 1), (6, 4), (2, 4).$$

Поэтому нам подходит расстановка

$$5, 3, 6, 2, 1, 4, \quad 7, 8, 9, 10, 11, \dots, 30, 31, 32.$$

Здесь соединены проводами все несоседние столбы, кроме пар, указанных выше. Итого $465 - 4 = 461$ кабель.

в) Докажем по индукции, что если имеется $n \geq 2$ столбов, то между столбами протянуто не меньше $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ кабелей. База $n = 2$ очевидна — 0 кабелей.

Индукционный переход. Рассмотрим расстановку $n + 1$ столба с наименьшим числом кабелей. Возьмем столб наименьшей высоты. Заметим, что если убрать этот столб (с кабелями, которые на нем закреплены) то для всех оставшихся кабелей требования прокладки (кабель соединяет столбы A и B , если между ними хотя бы один «высокий» столб) останутся выполненными. Значит, таких кабелей не меньше $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Что же касается кабелей, выходящих из наименьшего столба, таких кабелей заведомо не меньше $n - 2$ — они ведут ко всем столбам, кроме соседних. Таким образом, число кабелей в нашей расстановке $n + 1$ столба не меньше $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 2 = \frac{(n-1)(n-3)}{2}$, что и требуется для завершения шага индукции.

Замечание. Доказанная оценка реализуется, если мы каждый раз добавляем наименьший столб куда-нибудь в середину. Например, в конфигурации

$$32, 30, 28, 26, \dots, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, \dots, 25, 27, 29, 31.$$

кабели проложены между любыми двумя несоседними столбами, кроме пар 32–31, 31–30, ..., 4–3, 3–2 (30 пар). Итого 496 пар минус 31 пара соседних столбов и минус 30 пар из предыдущей фразы.

5. Помик выписал все возможные равенства, где число 2025 представлено в виде суммы нескольких слагаемых, ни одно из которых не делится на 75. Калуша выписала равенства, где число 2025 представлено в виде суммы нескольких слагаемых, но ни одно слагаемое не повторяется больше 74 раз. (Предполагается, что слагаемые во всех суммах располагаются по убыванию.) Например, у Помика встречается первое равенство, а у Калуши второе:

$$2025 = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{1000 \text{ раз}} + 25, \quad 2025 = \underbrace{150 + 150 + \dots + 150}_{13 \text{ раз}} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{25 \text{ раз}}.$$

Докажите, что у них получилось поровну равенств.

Решение. Построим правило (взаимно-однозначное соответствие), которое позволяет каждому равенству Помика поставить в пару равенство Калуши так, чтобы *разным равенствам Помика ставились в соответствие разные равенства Калуши и чтобы каждое равенство Калуши оказалось бы в паре с каким-то равенством Помика*. Тогда сам факт существования такого правила доказывает, что у Помика и у Калуши разложений поровну.

Правило простое — если в разложении Помика какое-то слагаемое x встречается не меньше 75 раз, следует заменить 75 из них на одно слагаемое $75x$, такие действия следует выполнять до тех пор, пока не окажется, что все слагаемые в сумме встречаются не более 74 раз. Например:

$$\begin{aligned} 2025 &= \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{1000 \text{ раз}} + 25 = \\ &= 150 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{925 \text{ раз}} + 25 = \\ &= 150 + 150 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{850 \text{ раз}} + 25 = \dots = \\ &= \underbrace{150 + 150 + \dots + 150}_{17 \text{ раз}} + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{25 \text{ раз}} + 25 \end{aligned}$$

Полученное в результате разложение имеется у Калуши. Заметим, что если такого слагаемого x не нашлось, то преобразовывать разложение Помика не нужно, оно у Калуши тоже есть. Отметим на всякий случай, что, сделав одно «укрупнение», т.е. получив число $75x$, Помик не сможет подвергнуть его еще одному укрупнению: никакое разложение не может содержать 75 слагаемых вида $75x$ — их сумма слишком велика. Тогда ясно, что если мы берем разные разложения Помика, то из них получаются разные разложения Калуши.

Для приведенного правила совсем несложно построить «обратное правило», которое для любого разложения Калуши предъявляет исходное разложение Помика: для этого нужно каждое слагаемое вида $75x$ (если такое найдётся) заменить на 75 одинаковых слагаемых x . Например

$$2025 = \underbrace{150 + 150 + \dots + 150}_{13 \text{ раз}} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{25 \text{ раз}} = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{1275 \text{ раз}} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{25 \text{ раз}}.$$

А вот разложение

$$2025 = \underbrace{37 + 37 + \dots + 37}_{54 \text{ раза}} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{27 \text{ раз}}$$

ни Помику, ни Калуше менять не потребуется, оно опять-таки встречается у обоих. Благодаря этому «обратному правилу» мы сразу видим, что каждое разложение Калуши может быть получено из какого-то разложения Помика.

Таким образом мы проверили, что описанное правило удовлетворяет нужным требованиям.